

不可分財の確率的公平割当

河瀬康志

東京大学

2021年7月30日
SOMA 第1回研究会

- ① 導入
- ② 効用関数が同一の場合
- ③ 効用関数が同一とは限らない場合
- ④ 無羨望割当
- ⑤ 今後の課題とまとめ

資源配分

家，パソコン，車，絵画，本，服，施設の予約枠， ...

- 限られた資源を何人かで分けたい
- どのように分けるのがよいか？



  を   で分けたい

	$\emptyset$			 
	0	200	150	350
	0	80	100	180

 を   で分けたい

	$\emptyset$			 
	0	200	150	350
	0	80	100	180

どの割当が「よい」？ どうやって見つける？

  : 200
  : 100

  : 150
  : 80

   : 350
 : 0

 : 0
   : 180

  : 200
 : 0

 : 0
  : 80

  : 150
 : 0

 : 0
  : 100

 : 0
 : 0

「よい」分け方とは

みんなが納得できて実行可能な配分ルールを設計したい

公平性 えこひいきをしない 誰かが独占するようなものは許さない

効率性 無駄のない割当ができる 全部捨てるのは公平だがダメ

計算可能性 効率的に計算できる 結果の計算に時間がかかると困る

誘因両立性 嘘をつくインセンティブがない 選好を正しく集められる

入力

- エージェント集合 $N = \{1, \dots, n\}$
- 不可分財の集合 E
- 各 $i \in N$ の効用関数 $u_i : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ (嘘については考慮せず関数値オラクルを仮定)
 - 正規化済: $u_i(\emptyset) = 0$
 - 単調: $u_i(X) \leq u_i(Y)$ if $X \subseteq Y \subseteq E$

出力

- 割当 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$
 - $X_i \subseteq E$ for all $i \in N$
 - $X_i \cap X_j = \emptyset$ for all distinct $i, j \in N$

効率性の典型的な指標

功利主義的社会最適

効用の和が最大の割当 ($\arg \max_{\mathbf{X}} \sum_{i \in N} u_i(X_i)$)

Bentham 「最大多数の最大幸福」 の価値観

パレート効率性

誰かの効用を犠牲にしなければ他の誰も効用を高められない割当

例:   を   に割当

	$\emptyset$			 
	0	200	150	350
	0	80	100	180

公平性の典型的な指標

無羨望性 (EF) [Foley 1967; Varian 1974]

誰も羨望 (envy) をもたない割当 ($u_i(X_i) \geq u_i(X_j) (\forall i, j \in N)$)

Envy-freeness up to one good (EF1) [Budish 2011]

羨望が高々財1個分 ($u_i(X_i) \geq u_i(X_j \setminus \{g\}) (\forall i, j \in N, \exists g \in X_j)$)

平等主義的社会最適 公平性と効率性の両方を考慮, 今日のメインターゲット

もっとも低い効用が最大となる割当 ($\arg \max_{\mathbf{X}} \min_{i \in N} u_i(X_i)$)

例:   を   に割当

	$\emptyset$			 
	0	300	150	450
	0	200	100	300

平等主義的社會厚生最大化問題

平等主義的社會厚生(ESW)

$$\max \min_{i \in N} u_i(X_i) \quad \text{s.t.} \quad (X_1, \dots, X_n) \text{ is a partition of } E$$

- 問題点1: 計算困難性
- 問題点2: 原理的に「公平」にすることが難しいことがある

問題点1: 計算困難性

$$u_i(X) = \sum_{e \in X} w_i(e)$$

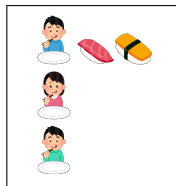
[Bansal and Sviridenko 2006]

- 効用関数 u_i が加法的な場合はサンタクロース問題として研究
子供たちに公平にプレゼントを配る
- サンタクロース問題ですら最適化問題として難しい
 - $n = 2$ で同じ効用関数の場合でもNP困難 (パーティション問題)
 - $(1/2 - \epsilon)$ 近似でもNP困難 [Lenstra–Shmoys–Tardos 1987]
 - $n^{O(1/\epsilon)}$ 時間で $\tilde{O}(1/n^\epsilon)$ 近似なら可能 ($\epsilon = \Omega(\frac{\log \log n}{\log n})$)
[Chakrabarty–Chuzhoy–Khanna 2009]

問題点2: 公平に分けられない

例:   を    に割当

	$\emptyset$			 
	0	200	150	350
	0	80	100	180
	0	300	200	500



は平等主義的社会最適

- どんな割当でもESWが0となる以上仕方がない？

➡ 確率を用いれば解決可能

確率的割当による平等主義的社会厚生最大化

- 財の割当に「くじ」を使うことを許す
 - エージェントはリスク中立的であると仮定
- 「くじ」の嬉しさは期待値で計算できる
(cf. 期待効用理論 [von Neumann–Morgenstern 1944])

MaxESW問題

割当上の確率分布

$$\max \min_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p} [u_i(X_i)] \quad \text{s.t.} \quad p \in \mathcal{X}$$

Carathéodoryの定理より、サポートサイズ $n + 1$ 以下の最適解が存在

確率的割当の例

例:   を    に割当

	$\emptyset$			 
	0	200	150	350
	0	80	100	180
	0	300	200	500

確率的割当の例

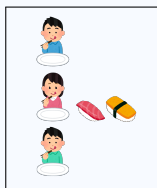
例:   を    に割当

	$\emptyset$			 
	0	200	150	350
	0	80	100	180
	0	300	200	500

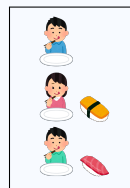
MaxESWの最適解



w.p. 0.54



w.p. 0.1



w.p. 0.36

$$\min_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p}[u_i(X_i)] = 108$$

注意：確率的割当 $\neq$ 小数割当

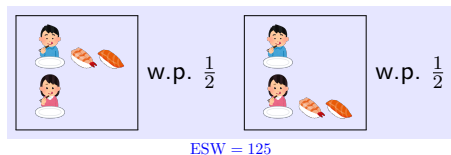
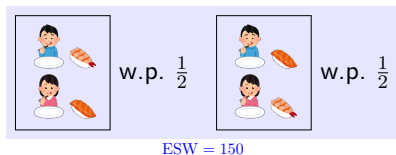
例:   を   に割当

	$\emptyset$			 
	0	100	200	250
	0	100	200	250

- 財ごとに受け取る割合ではなく割当の分布を考える必要がある

効用関数が加法的な場合は小数割当でも大丈夫 (Birkhoff-von Neumannの定理)

- 例えば  と  が  と  をそれぞれ $1/2$ もらっても



- ① 導入
- ② 効用関数が同一の場合
- ③ 効用関数が同一とは限らない場合
- ④ 無羨望割当
- ⑤ 今後の課題とまとめ

同一効用関数の場合

MaxESW問題

平等主義的社會厚生(ESW)

割当上の確率分布

$$\max \min_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p}[u(X_i)] \quad \text{s.t.} \quad p \in \mathcal{X}$$

- 効用関数が加法的ならば各財を一様ランダムに割り当てれば最適
最適値は $u(E)/n$
- 加法的でない場合もMaxUSW問題を解けば最適解を構成できる

MaxUSW問題

功利主義的社會厚生(USW)

$$\max \sum_{i \in N} u(X_i) \quad \text{s.t.} \quad (X_1, \dots, X_n) \text{ is a partition of } E$$

定理 [Kawase–Sumita 2020]

各エージェントの効用関数が同一の場合

- MaxUSWの α 近似解からMaxESWの α 近似解を多項式時間で構成可能
- MaxESWの α 近似解からMaxUSWの α 近似解を多項式時間で構成可能

証明

- MaxUSWの α 近似解を $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ とする時,
 $(X_i^*, \dots, X_n^*, X_1^*, \dots, X_{i-1}^*)$ を確率 $1/n$ で出力すれば良い
- MaxESWの α 近似解を p^* とする時,
 $\arg \max \{ \sum_{i \in N} u(X_i) \mid \mathbf{X} \in \text{supp}(p^*) \}$ を取ってくれば良い

MaxUSW問題

功利主義的社会厚生(USW)

$$\max \sum_{i \in N} u(X_i) \quad \text{s.t.} \quad (X_1, \dots, X_n) \text{ is a partition of } E$$

効用関数のクラスに応じた結果 (MaxUSWの結果からMaxESWの結果も従う)

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^E \text{ with } p \leq q, \forall X \in \arg \max_{E' \subseteq E} u(E') - p(E'), \exists Y \in \arg \max_{E' \subseteq E} u(E') - q(E') \text{ s.t. } \{v \in X \mid p(v) = q(v)\} \subseteq Y$$

- 粗代替的 (M[♭]凹) の場合, 厳密解を計算可能 [Bertelsen '05; Murota '96]
- 劣モジュラの場合, $1 - 1/e$ 近似解を計算可能 [Vondrák '08]
- 劣モジュラの場合, $1 - 1/e - \epsilon$ 近似はNP困難 [Khot et al. '08]

$$u(X) + u(Y) \geq u(X \cup Y) + u(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq E)$$

(加法的 $\subsetneq$ 粗代替的 $\subsetneq$ 劣モジュラ)

- ① 導入
- ② 効用関数が同一の場合
- ③ 効用関数が同一とは限らない場合
- ④ 無羨望割当
- ⑤ 今後の課題とまとめ

効用関数が同一とは限らない場合

MaxESW問題

$$\max \min_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p} [u_i(X_i)] \quad \text{s.t.} \quad p \in \mathcal{X}$$

平等主義的社会厚生(ESW) 割当上の確率分布

MaxUSW問題

$$\max \sum_{i \in N} u_i(X_i) \quad \text{s.t.} \quad (X_1, \dots, X_n) \text{ is a partition of } E$$

功利主義的社会厚生(USW)

効用関数が同一と限らずとも，MaxUSWが解ければMaxESWが解ける

定理 [Kawase–Sumita 2020]

効用関数のクラス $\mathcal{U}$ について，MaxUSWの α 近似アルゴリズムが存在
 $\implies \mathcal{U}$ について，MaxESWの α 近似アルゴリズムが存在

ただし任意の $\alpha > 0$ ， $u \in \mathcal{U}$ について $\alpha \cdot u \in \mathcal{U}$ を仮定

$\mathcal{U}$ を限定した結果

定理 [Kawase–Sumita 2020]

効用関数のクラス $\mathcal{U}$ について, MaxUSW の α 近似アルゴリズムが存在
 $\implies \mathcal{U}$ について, MaxESW の α 近似アルゴリズムが存在

ただし任意の $\alpha > 0$, $u \in \mathcal{U}$ について $\alpha \cdot u \in \mathcal{U}$ を仮定

- $\mathcal{U} = \{u : \text{加法的}\}$ の時, 厳密アルゴリズムが存在

MaxUSW はグリーディに割り当てるのが最適

- $\mathcal{U} = \{u : \text{粗代替的}\}$ の時, 厳密アルゴリズムが存在

MaxUSW は多項式時間で解ける [Bertelsen '05; Murota '96]

- $\mathcal{U} = \{u : \text{劣モジュラ}\}$ の時, $1 - 1/e$ 近似アルゴリズムが存在

MaxUSW に対し $1 - 1/e$ 近似アルゴリズムが存在 [Vondrák '08]

- $\mathcal{U} = \{u : \text{劣モジュラ}\}$ の時, $1 - 1/e - \epsilon$ 近似はNP困難

効用関数が同一の場合に限っても $1 - 1/e - \epsilon$ 近似はNP困難

証明のアイデア

線形計画でMaxESWの定式化

$$\begin{array}{ll}\max & t \\ \text{s.t.} & t \leq \sum_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} u_i(X_i) p_{\mathbf{X}} \quad (\forall i \in N), \\ & \sum_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} p_{\mathbf{X}} = 1, \\ & p_{\mathbf{X}} \geq 0 \quad (\forall \mathbf{X} \in \mathcal{X}).\end{array}$$

$q_{\mathbf{X}} = p_{\mathbf{X}}/t$ と置き換え (最適値は正と仮定)

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} q_{\mathbf{X}} \\ \text{s.t.} & \sum_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} u_i(X_i) q_{\mathbf{X}} \geq 1 \quad (\forall i \in N), \\ & q_{\mathbf{X}} \geq 0 \quad (\forall \mathbf{X} \in \mathcal{X}).\end{array}$$

双対

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{i \in N} z_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in N} u_i(X_i) z_i \leq 1 \quad (\forall \mathbf{X} \in \mathcal{X}), \\ & z_i \geq 0 \quad (\forall i \in N).\end{array}$$

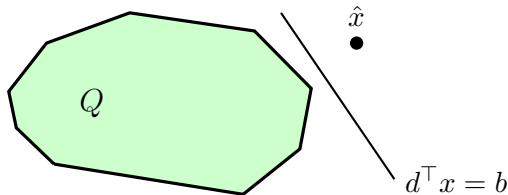
分離問題

入力 多面体 Q と点 $\hat{x} \in \mathbb{R}^r$

出力 $\hat{x} \in Q$ なら「YES」, $\hat{x} \notin Q$ なら $d^\top \hat{x} > d^\top x$ ($\forall x \in P$)を満たす d

定理 [Grötschel, Lovász, Schrijver 1981]

有界多面体 Q について、分離問題が多項式時間で解けるとき、
線形計画問題 $\max\{c^\top x \mid x \in Q\}$ は多項式時間で解くことができる
(c の入力サイズと Q の各端点を表すのに必要なビット数についての多項式)



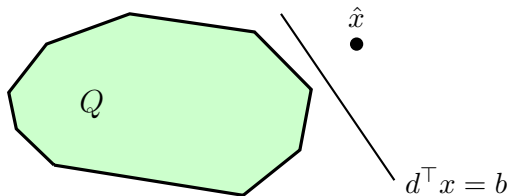
分離問題

入力 多面体 Q と点 $\hat{x} \in \mathbb{R}^r$

出力 $\hat{x} \in Q$ なら「YES」, $\hat{x} \notin Q$ なら $d^\top \hat{x} > d^\top x$ ($\forall x \in P$)を満たす d

定理 [Grötschel, Lovász, Schrijver 1981]

有界多面体 Q について、分離問題が多項式時間で解けるとき、
線形計画問題 $\max\{c^\top x \mid x \in Q\}$ は多項式時間で解くことができる
(c の入力サイズと Q の各端点を表すのに必要なビット数についての多項式)



今回は、分離問題が近似的にしか解けないかも

定理 [Jansen 2003]

線形計画問題 $\max\{c^\top y \mid a_j^\top y \leq 1 \ (\forall j = 1, \dots, m), \ y \in B\}$ は、
次のような多項式時間アルゴリズムが存在するならば α 近似可能

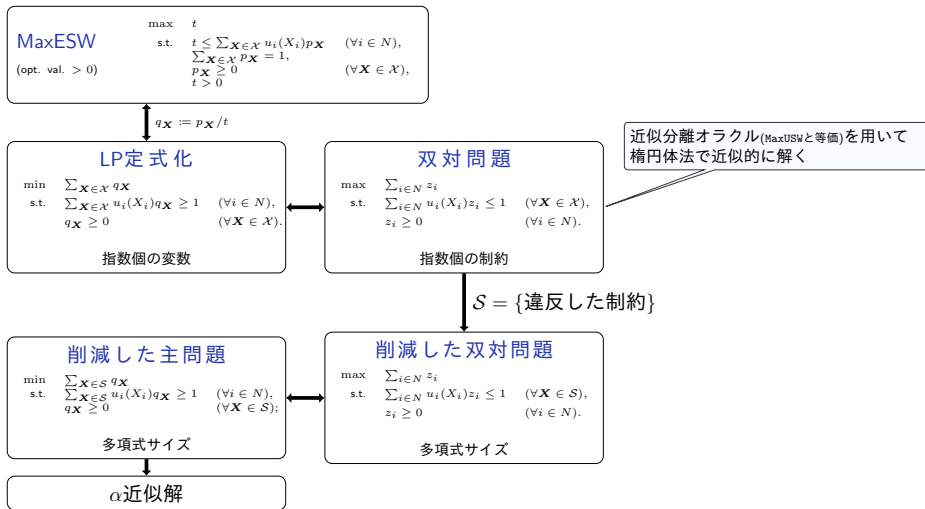
- B に関する分離問題を解く
- 各 $y \in B$ に対し, “ $a_j^\top y \leq 1 \ (\forall j = 1, \dots, m)$ である” か
 $a_\ell^\top y \geq \alpha \cdot \max_j a_j^\top y$ となる “ ℓ ” を出力 (近似分離問題)

我々が解きたい双対問題はこの形。MaxUSW を近似できれば良い

双対

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in N} z_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in N} u_i(X_i) z_i \leq 1 \quad (\forall \mathbf{X} \in \mathcal{X}), \\ & z_i \geq 0 \quad (\forall i \in N). \end{array}$$

近似アルゴリズムの概観



定理 [Kawase–Sumita 2020]

MaxUSWの α 近似アルゴリズム $\Rightarrow$ MaxESWの α 近似アルゴリズム

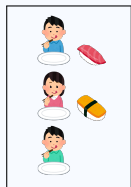
- ① 導入
- ② 効用関数が同一の場合
- ③ 効用関数が同一とは限らない場合
- ④ 無羨望割当**
- ⑤ 今後の課題とまとめ

MaxESWの不公平性

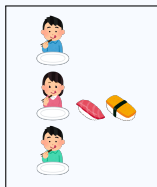
  を    に割当

	$\emptyset$			 
	0	200	150	350
	0	80	100	180
	0	300	200	500

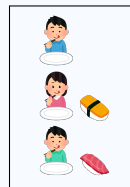
MaxESWの最適解



w.p. 0.54



w.p. 0.1



w.p. 0.36

➡  が  に羨望をもつなど、羨望の意味で不公平

確率的無羨望性割当

確率的割当 p が(期待値の意味で)無羨望

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p}[u_i(X_i)] \geq \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p}[u_i(X_j)] \quad (\forall i, j \in N)$$

envy-free MaxESW問題

$$\max \min_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p}[u_i(X_i)] \quad \text{s.t.} \quad p \in \mathcal{X}, \text{ } p \text{ は無羨望}$$

envy-free MaxESWの例

  を    に割当

	$\emptyset$			 
	0	200	150	350
	0	80	100	180
	0	300	200	500

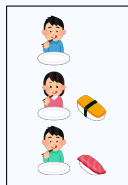
envy-free MaxESWの最適解



w.p. $3/7$



w.p. $3/14$



w.p. $5/14$

$$\min_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p}[u_i(X_i)] = 550/7$$

効用関数が同一の場合

envy-free MaxESW問題

$$\max \min_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p} [u(X_i)] \quad \text{s.t.} \quad p \in \mathcal{X}, p \text{ は無羨望}$$

- 任意の割当は割当先をランダムにすることで無羨望にできる
($X_i^*, \dots, X_n^*, X_1^*, \dots, X_{i-1}^*$)を確率 $1/n$ で出力
- envy-free MaxESWの最適値はMaxESWの最適値に等しい
- MaxUSWの α 近似解からenvy-free MaxESWの α 近似解を構成可能

効用関数が粗代替的な時

定理 [Kawase–Sumita 2020]

効用関数が粗代替的な場合も， envy-free MaxESWはNP困難

- 無羨望制約がなければ多項式時間可解だったのと対照的

$$u_i(S) = \max_{T \subseteq S: T \in \mathcal{F}_i} \sum_{e \in T} u_i(\{e\}) \text{ for a matroid } \mathcal{F}_i$$

- 粗代替的の部分クラスである **マトロイド加法的**について証明
- 帰着は **Partition into Triangles** から

与えられたグラフを三角形に分割できるか

$(E, \mathcal{F})$ がマトロイド $\iff$

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- (ii) $X \subseteq Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F}$,
- (iii) $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y$ s.t. $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

定理

効用関数が加法的ならば,

envy-free MaxESW問題は多項式時間で厳密解を求められる

- 各財を各エージェントに割り当てる確率に射影して考えれば良い

Birkhoff-von Neumannの定理により復元可能

- 具体的には次の線形計画問題を解けば良い (多項式サイズ)

$$\begin{array}{ll}\max & t \\ \text{s.t.} & t \leq \sum_{e \in E} u_i(\{e\}) p_{i,e} & (\forall i \in N), \\ & \sum_{e \in E} u_i(\{e\}) p_{i,e} \geq \sum_{e \in E} u_i(\{e\}) p_{j,e} & (\forall i, j \in N), \\ & \sum_{i \in N} p_{i,e} = 1 & (\forall e \in E), \\ & p_{i,e} \geq 0 & (\forall i \in N, e \in E).\end{array}$$

定理 [Kawase–Sumita 2020]

$$u_i(S) = \max_{T \subseteq S: T \in \mathcal{F}} \sum_{e \in T} u_i(\{e\}) \text{ for a matroid } \mathcal{F}$$

効用関数が共通のマトロイドについて**マトロイド加法的**ならば,
envy-free MaxESW問題は多項式時間で厳密解を求められる

以下の議論により楕円体法を使えば厳密解を求められる

- 共通のマトロイドについて独立となる部分割当だけ考えれば良い

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \text{ s.t. } X_i \in \mathcal{F} \ (\forall i \in N), X_i \subseteq E \ (\forall i \in N), X_i \cap X_j = \emptyset \ \forall \text{ distinct } i, j \in N$$

- 実行可能な割当はマトロイド交差として表現可能

各財は1人にしか割当られないことを表す分割マトロイドを考える

- 効用関数は加法的と解釈できる

⇒ 各財が各エージェントに割り当てられる確率を求めれば良い

- 実行可能な確率がなす多面体は分離問題が解ける

マトロイド交差の多面体はマトロイド多面体の交差、無羨望性は多項式本の制約

目次

- ① 導入
- ② 効用関数が同一の場合
- ③ 効用関数が同一とは限らない場合
- ④ 無羨望割当
- ⑤ 今後の課題とまとめ

事後の割当も考慮 (best of both worlds)

定理 [Freeman–Shah–Vaish '20; Aziz '20]

効用関数が加法的な場合、期待値の意味で無羨望となり、事後の割当がEF1となる確率分布を効率的に計算可能

定理 [Freeman–Shah–Vaish '20]

効用関数が加法的でも、期待値の意味で無羨望となり、事後の割当がEF1とパレート最適を満たす確率分布は存在しない

- 事後の割当がEF1となる条件で、事前の意味でMaxESW?
- EF1割当上の確率分布がなす多面体を特徴付けたい

確率的割当 p の無羨望性

ex-ante EF (自明に存在)

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p}[u_i(X_i)] \geq \mathbb{E}_{\mathbf{X} \sim p}[u_i(X_j)] \quad (\forall i, j \in N)$$

ex-post EF (厳しすぎる)

$$\forall \mathbf{X} \in \text{supp}(p), u_i(X_i) \geq u_i(X_j) \quad (\forall i, j \in N)$$

interim EF [Caragiannis–Kanellopoulos–Kyropoulou '21]

$$\forall \mathbf{X} \in \text{supp}(p), u_i(X_i) \geq \mathbb{E}_{\mathbf{X}' \sim p}[u_i(X'_j) \mid X'_i = X_i] \quad (\forall i, j \in N)$$

性質

- ex-post EF $\Rightarrow$ interim EF $\Rightarrow$ ex-ante EF
- interim EFは存在するがex-post EFは存在しない例がある
- interim EFは存在しないかも 🍣🍣

他の中間的な概念は？

誘因両立性を考慮

定理

誘因両立性と無羨望性を同時に満たす確率的メカニズムが存在

- 各エージェント i に確率 $1/n$ で全部の財 E を割り当てれば良い
- MaxUSW と MaxESW の $1/n$ 近似にもなる

効用関数を限定すれば望ましい性質をもっと同時に満たすことが可能

定理 [Babaioff–Ezra–Feige '20]

効用関数がマトロイドランク関数の時,
下記を満たす効率的に計算できる確率的メカニズムが存在

- 誘因両立的, 期待値の意味で無羨望
- 事後割当が EF1, 功利主義的・平等主義的社会厚生最大

EFX, ナッシュ社会厚生最大

もう少し広いクラスで何ができるか？

リスク中立でない場合

確率的割当に対する嬉しさは期待値で良いか？

どちらが良い？

(A) 確実に100万円

(B) 95%で110万円, 5%で0円

リスク中立でない場合

確率的割当に対する嬉しさは期待値で良いか？

どちらが良い？

(A) 確実に100万円

(B) 95%で110万円, 5%で0円

確率的な利得に対する効用のモデル

- 期待効用理論: $\mathbb{E}[u_i(X_i)]$
- 平均分散型効用関数: $\mathbb{E}[u_i(X_i)] - \lambda \cdot \mathbf{Var}(v_i(X_i))$
- Value at Risk: $\inf\{u \mid \Pr[u_i(X_i) \leq \text{VaR}] \geq \alpha\}$
- 累積プロスペクト理論
- 確率優越 $\Pr_{X \sim p}[u_i(X_i) \geq s] \geq \Pr_{X \sim p'}[u_i(X_i) \geq s] \quad \forall s$

- 確率的公平割当について紹介
- MaxESWについて
 - 加法的, 粗代替的な場合は多項式時間可解
 - 劣モジュラの場合は $(1 - \frac{1}{e})$ 近似可能 (best possible)
- envy-free MaxESWについて
 - マトロイド加法的な場合でも一般にはNP困難
 - マトロイドが共通であれば多項式時間可解
- 誘因両立性や事後割当についてどう扱えば良いか未解決