選択対応の経路独立性

河瀬康志 (東京大学)

坂東桂介氏・今村謙三氏との共同研究

2026 年 2 月 23 日（月） @国立情報学研究所

RAOTA後継部会

MATCHA: 最適化のモデリングとアルゴリズム

(Seminar on **M**odeling and **A**lgorithms for Optimization: **T**heory, Te**ch**niques, **A**pplications)

- 主査：河瀬康志，幹事：柳下翔太郎（統計数理研究所），久米啓太（東京科学大学）
- つくば合宿
  - 2026年5月30日（土），31日（日）
  - 招待講演：岡本吉央先生

目次

モチベーション

- 「選択」は人々や組織の選好を表す基本概念
- 標準的なマッチング理論などではベストな選択が一意であることを仮定（選択関数）
- しかし，現実には同順位は頻繁に発生する
  - 試験の点数が同点，情報が粗い（学歴，専攻，スキル）
- ランダムなタイブレークなどにより同順位を解消できるが，
  効率性が犠牲になったり，望ましい性質が壊れるかもしれない

➜ 同順位を表現できる「選択対応」に対する理論整備が重要

本研究：**経路独立な選択対応**の理論を構築＆安定マッチングへの応用

選択関数と選択対応

$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$の部分集合に対する選好

選択関数 $C : 2^I \to 2^I$

- 1つの集合 $C(X) \subseteq X$を選ぶ
- 例：$C(\{a, b\}) = \{a\}$
- 同順位を表現できない
- 理論が整備されている

選択対応 $\mathcal{C} : 2^I \rightrightarrows 2^I$

- 複数候補 $\mathcal{C}(X) \subseteq 2^X$ を選ぶ
- 例：$\mathcal{C}(\{a, b\}) = \{\{a\}, \{b\}\}$
- 同順位を表現できる
- あまり整備されていない

選択関数の性質

選択関数 $C\colon 2^I \to 2^I$ について：

- **合理化可能**： $\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}$, $\{C(X)\} = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **経路独立 (PI)**： $C(X \cup X') = C(C(X) \cup X')$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **代替性 (SUB)**： $C(X) \cap X' \subseteq C(X')$ $(\forall X' \subseteq \forall X \subseteq I)$
- **整合的 (IRC)**： $C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X)$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **サイズ単調 (LAD)**： $X' \subseteq X \Rightarrow |C(X')| \leq |C(X)|$ $(\forall X, X' \subseteq I)$

- PI $\iff$ SUB + IRC [Aizerman&Malishevski 1981]
- PI $\iff$ **順序凹** (SSQM$^\natural$凹) な効用で合理化可能 [YokoteHYK 2025]

  u が順序凹: $\forall X, X' \subseteq I$, $\forall i \in X \setminus X'$, $\exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$: (i) $u(X) < u(X - i + j)$, (ii) $u(X') < u(X' + i - j)$, or (iii) $u(X) = u(X - i + j)$ and $u(X') = u(X' + i - j)$
- $M^\natural$**凹** で合理化可能 $\Rightarrow$ PI + LAD [Fujishige&Tamura 2006, Murota&Yokoi 2015]

  u が$M^\natural$凹: $\forall X, X' \subseteq I$, $\forall i \in X \setminus X'$, $\exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$, $u(X) + u(X') \leq u(X - i + j) + u(X' + i - j)$

選択関数の性質

選択関数 $C\colon 2^I \to 2^I$ について：

- **合理化可能**： $\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}, \{C(X)\} = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)\ (\forall X \subseteq I)$
- **経路独立 (PI)**： $C(X \cup X') = C(C(X) \cup X')\ (\forall X, X' \subseteq I)$
- **代替性 (SUB)**： $C(X) \cap X' \subseteq C(X')\ (\forall X' \subseteq \forall X \subseteq I)$
- **整合的 (IRC)** ：$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X)\ (\forall X, X' \subseteq I)$
- **サイズ単調 (LAD)**：$X' \subseteq X \Rightarrow |C(X')| \leq |C(X)|\ (\forall X, X' \subseteq I)$

- PI $\iff$ SUB + IRC [Aizerman&Malishevski 1981]
- PI $\iff$ **順序凹** (SSQM$^\natural$凹) な効用で合理化可能 [YokoteHYK 2025]

  u が順序凹: $\forall X, X' \subseteq I, \forall i \in X \setminus X', \exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$: (i) $u(X) < u(X - i + j)$, (ii) $u(X') < u(X' + i - j)$, or (iii) $u(X) = u(X - i + j)$ and $u(X') = u(X' + i - j)$
- $M^\natural$**凹** で合理化可能 $\Rightarrow$ PI + LAD [Fujishige&Tamura 2006, Murota&Yokoi 2015]

  u が$M^\natural$凹: $\forall X, X' \subseteq I, \forall i \in X \setminus X', \exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}, u(X) + u(X') \leq u(X - i + j) + u(X' + i - j)$

選択関数の性質

選択関数 $C\colon 2^I \to 2^I$ について：

- **合理化可能**： $\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}, \{C(X)\} = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **経路独立 (PI)**： $C(X \cup X') = C(C(X) \cup X')$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **代替性 (SUB)**： $C(X) \cap X' \subseteq C(X')$ $(\forall X' \subseteq \forall X \subseteq I)$
- **整合的 (IRC)** ：$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X)$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **サイズ単調 (LAD)**：$X' \subseteq X \Rightarrow |C(X')| \leq |C(X)|$ $(\forall X, X' \subseteq I)$

- PI $\iff$ SUB + IRC [Aizerman&Malishevski 1981]
- PI $\iff$ **順序凹** (SSQM$^\natural$凹) な効用で合理化可能 [YokoteHYK 2025]

  u が順序凹: $\forall X, X' \subseteq I, \forall i \in X \setminus X', \exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$: (i) $u(X) < u(X - i + j)$, (ii) $u(X') < u(X' + i - j)$, or (iii) $u(X) = u(X - i + j)$ and $u(X') = u(X' + i - j)$
- $M^\natural$凹 で合理化可能 $\Rightarrow$ PI + LAD [Fujishige&Tamura 2006, Murota&Yokoi 2015]

  u が$M^\natural$凹: $\forall X, X' \subseteq I, \forall i \in X \setminus X', \exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}, u(X) + u(X') \leq u(X - i + j) + u(X' + i - j)$

選択関数の性質

選択関数 $C\colon 2^I \to 2^I$ について：

- **合理化可能**： $\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}, \{C(X)\} = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **経路独立 (PI)**： $C(X \cup X') = C(C(X) \cup X')$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **代替性 (SUB)**： $C(X) \cap X' \subseteq C(X')$ $(\forall X' \subseteq \forall X \subseteq I)$
- **整合的 (IRC)** ： $C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X)$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **サイズ単調 (LAD)**： $X' \subseteq X \Rightarrow |C(X')| \leq |C(X)|$ $(\forall X, X' \subseteq I)$

- PI $\iff$ SUB + IRC [Aizerman&Malishevski 1981]
- PI $\iff$ **順序凹** (SSQM$^\natural$凹) な効用で合理化可能 [YokoteHYK 2025]

  u が順序凹: $\forall X, X' \subseteq I, \forall i \in X \setminus X', \exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$: (i) $u(X) < u(X - i + j)$, (ii) $u(X') < u(X' + i - j)$, or (iii) $u(X) = u(X - i + j)$ and $u(X') = u(X' + i - j)$
- $M^\natural$**凹** で合理化可能 $\Rightarrow$ PI + LAD [Fujishige&Tamura 2006, Murota&Yokoi 2015]

  u が$M^\natural$凹: $\forall X, X' \subseteq I, \forall i \in X \setminus X', \exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}, u(X) + u(X') \leq u(X - i + j) + u(X' + i - j)$

選択関数の性質

選択関数 $C\colon 2^I \to 2^I$ について：

- **合理化可能**： $\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}$, $\{C(X)\} = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **経路独立 (PI)**： $C(X \cup X') = C(C(X) \cup X')$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **代替性 (SUB)**： $C(X) \cap X' \subseteq C(X')$ $(\forall X' \subseteq \forall X \subseteq I)$
- **整合的 (IRC)** ：$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X)$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **サイズ単調 (LAD)**：$X' \subseteq X \Rightarrow |C(X')| \leq |C(X)|$ $(\forall X, X' \subseteq I)$

- PI $\iff$ SUB + IRC [Aizerman&Malishevski 1981]
- PI $\iff$ **順序凹** (SSQM$^\natural$凹) な効用で合理化可能 [YokoteHYK 2025]

  u が順序凹: $\forall X, X' \subseteq I$, $\forall i \in X \setminus X'$, $\exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$: (i) $u(X) < u(X - i + j)$, (ii) $u(X') < u(X' + i - j)$, or (iii) $u(X) = u(X - i + j)$ and $u(X') = u(X' + i - j)$
- $M^\natural$**凹** で合理化可能 $\Rightarrow$ PI + LAD [Fujishige&Tamura 2006, Murota&Yokoi 2015]

  u が$M^\natural$凹: $\forall X, X' \subseteq I$, $\forall i \in X \setminus X'$, $\exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$, $u(X) + u(X') \leq u(X - i + j) + u(X' + i - j)$

選択関数の性質

選択関数 $C\colon 2^I \to 2^I$ について：

- **合理化可能**： $\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R},\ \{C(X)\} = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)\ (\forall X \subseteq I)$
- **経路独立 (PI)**： $C(X \cup X') = C(C(X) \cup X')\ (\forall X, X' \subseteq I)$
- **代替性 (SUB)**： $C(X) \cap X' \subseteq C(X')\ (\forall X' \subseteq \forall X \subseteq I)$
- **整合的 (IRC)** ：$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X)\ (\forall X, X' \subseteq I)$
- **サイズ単調 (LAD)**：$X' \subseteq X \Rightarrow |C(X')| \le |C(X)|\ (\forall X, X' \subseteq I)$

- PI $\iff$ SUB + IRC [Aizerman&Malishevski 1981]
- PI $\iff$ **順序凹** (SSQM$^\natural$凹) な効用で合理化可能 [YokoteHYK 2025]
  u が順序凹: $\forall X, X' \subseteq I, \forall i \in X \setminus X', \exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\emptyset\}$: (i) $u(X) < u(X - i + j)$, (ii) $u(X') < u(X' + i - j)$, or (iii) $u(X) = u(X - i + j)$ and $u(X') = u(X' + i - j)$
- $M^\natural$**凹** で合理化可能 $\Rightarrow$ PI + LAD [Fujishige&Tamura 2006, Murota&Yokoi 2015]
  u が$M^\natural$凹: $\forall X, X' \subseteq I, \forall i \in X \setminus X', \exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\emptyset\}, u(X) + u(X') \le u(X - i + j) + u(X' + i - j)$

選択関数の性質

選択関数 $C\colon 2^I \to 2^I$ について：

- **合理化可能**： $\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}$, $\{C(X)\} = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **経路独立 (PI)**： $C(X \cup X') = C(C(X) \cup X')$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **代替性 (SUB)**： $C(X) \cap X' \subseteq C(X')$ $(\forall X' \subseteq \forall X \subseteq I)$
- **整合的 (IRC)** ：$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X)$ $(\forall X, X' \subseteq I)$
- **サイズ単調 (LAD)**：$X' \subseteq X \Rightarrow |C(X')| \leq |C(X)|$ $(\forall X, X' \subseteq I)$

- PI $\iff$ SUB + IRC [Aizerman&Malishevski 1981]
- PI $\iff$ **順序凹** (SSQM$^\natural$凹) な効用で合理化可能 [YokoteHYK 2025]

  u が順序凹: $\forall X, X' \subseteq I$, $\forall i \in X \setminus X'$, $\exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$: (i) $u(X) < u(X - i + j)$, (ii) $u(X') < u(X' + i - j)$, or (iii) $u(X) = u(X - i + j)$ and $u(X') = u(X' + i - j)$
- $M^\natural$**凹** で合理化可能 $\Rightarrow$ PI + LAD [Fujishige&Tamura 2006, Murota&Yokoi 2015]

  u が$M^\natural$凹: $\forall X, X' \subseteq I$, $\forall i \in X \setminus X'$, $\exists j \in (X' \setminus X) \cup \{\varnothing\}$, $u(X) + u(X') \leq u(X - i + j) + u(X' + i - j)$

選択対応の性質

選択対応 $\mathcal{C}\colon 2^I \rightrightarrows 2^I$ について：

- **合理化可能**：$\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}, \mathcal{C}(X) = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **SUB1**: $\forall Z \in \mathcal{C}(X), \exists Z' \in \mathcal{C}(X')$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **SUB2**: $\forall Z' \in \mathcal{C}(X'), \exists Z \in \mathcal{C}(X)$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **IRC**： $Y \in \mathcal{C}(X), Y \subseteq Y' \subseteq X \implies Y \in \mathcal{C}(Y')$ $(\forall Y' \subseteq X \subseteq I)$

- $C_1, \ldots, C_k$がSUB, IRC $\Rightarrow \mathcal{C}(X) := \{C_1(X), \ldots, C_k(X)\}$は SUB1, SUB2, IRC
- SUB1, SUB2, IRCでも合理化できないかも

例： $\mathcal{C}(X) = \{X, \emptyset\}$ $\mathcal{C}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}, \mathcal{C}(\{a,b\}) = \{\{a,b\}, \emptyset\} \Rightarrow u(\{a,b\}) = u(\emptyset)$

選択対応の性質

選択対応 $\mathcal{C}\colon 2^I \rightrightarrows 2^I$ について：

- **合理化可能**：$\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}, \mathcal{C}(X) = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **SUB1**: $\forall Z \in \mathcal{C}(X), \exists Z' \in \mathcal{C}(X')$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **SUB2**: $\forall Z' \in \mathcal{C}(X'), \exists Z \in \mathcal{C}(X)$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **IRC**： $Y \in \mathcal{C}(X), Y \subseteq Y' \subseteq X \implies Y \in \mathcal{C}(Y')$ $(\forall Y' \subseteq X \subseteq I)$

- $C_1, \ldots, C_k$がSUB, IRC $\Rightarrow \mathcal{C}(X) \coloneqq \{C_1(X), \ldots, C_k(X)\}$は SUB1, SUB2, IRC
- SUB1, SUB2, IRCでも合理化できないかも

  例： $\mathcal{C}(X) = \{X, \emptyset\}$ $\mathcal{C}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}, \mathcal{C}(\{a, b\}) = \{\{a, b\}, \emptyset\} \Rightarrow u(\{a, b\}) = u(\emptyset)$

選択対応の性質

選択対応 $\mathcal{C}\colon 2^I \rightrightarrows 2^I$ について：

- **合理化可能**：$\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(X) = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **SUB1**: $\forall Z \in \mathcal{C}(X)$, $\exists Z' \in \mathcal{C}(X')$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **SUB2**: $\forall Z' \in \mathcal{C}(X')$, $\exists Z \in \mathcal{C}(X)$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **IRC**： $Y \in \mathcal{C}(X), Y \subseteq Y' \subseteq X \implies Y \in \mathcal{C}(Y')$ $(\forall Y' \subseteq X \subseteq I)$

- $C_1, \ldots, C_k$がSUB, IRC $\Rightarrow \mathcal{C}(X) := \{C_1(X), \ldots, C_k(X)\}$は SUB1, SUB2, IRC
- SUB1, SUB2, IRCでも合理化できないかも

  例： $\mathcal{C}(X) = \{X, \emptyset\}$ $\quad \mathcal{C}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}, \mathcal{C}(\{a,b\}) = \{\{a,b\}, \emptyset\} \Rightarrow u(\{a,b\}) = u(\emptyset)$

選択対応の性質

選択対応 $\mathcal{C}\colon 2^I \rightrightarrows 2^I$ について：

- **合理化可能**：$\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(X) = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **SUB1**: $\forall Z \in \mathcal{C}(X)$, $\exists Z' \in \mathcal{C}(X')$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **SUB2**: $\forall Z' \in \mathcal{C}(X')$, $\exists Z \in \mathcal{C}(X)$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **IRC**： $Y \in \mathcal{C}(X), Y \subseteq Y' \subseteq X \implies Y \in \mathcal{C}(Y')$ $(\forall Y' \subseteq X \subseteq I)$

- $C_1, \ldots, C_k$がSUB, IRC $\Rightarrow \mathcal{C}(X) \coloneqq \{C_1(X), \ldots, C_k(X)\}$は SUB1, SUB2, IRC
- SUB1, SUB2, IRCでも合理化できないかも

  例： $\mathcal{C}(X) = \{X, \emptyset\}$ $\mathcal{C}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}, \mathcal{C}(\{a,b\}) = \{\{a,b\}, \emptyset\} \Rightarrow u(\{a,b\}) = u(\emptyset)$

選択対応の性質

選択対応 $\mathcal{C}\colon 2^I \rightrightarrows 2^I$ について：

- **合理化可能**：$\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(X) = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ ($\forall X \subseteq I$)
- **SUB1**: $\forall Z \in \mathcal{C}(X)$, $\exists Z' \in \mathcal{C}(X')$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ ($\forall X' \subseteq X \subseteq I$)
- **SUB2**: $\forall Z' \in \mathcal{C}(X')$, $\exists Z \in \mathcal{C}(X)$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ ($\forall X' \subseteq X \subseteq I$)
- **IRC**： $Y \in \mathcal{C}(X), Y \subseteq Y' \subseteq X \implies Y \in \mathcal{C}(Y')$ ($\forall Y' \subseteq X \subseteq I$)

- $C_1, \ldots, C_k$がSUB, IRC $\Rightarrow \mathcal{C}(X) := \{C_1(X), \ldots, C_k(X)\}$は SUB1, SUB2, IRC
- SUB1, SUB2, IRCでも合理化できないかも

例： $\mathcal{C}(X) = \{X, \emptyset\}$ $\mathcal{C}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}, \mathcal{C}(\{a,b\}) = \{\{a,b\}, \emptyset\} \Rightarrow u(\{a,b\}) = u(\emptyset)$

選択対応の性質

選択対応 $\mathcal{C}\colon 2^I \rightrightarrows 2^I$ について：

- **合理化可能**：$\exists u\colon 2^I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(X) = \arg\max_{Y \subseteq X} u(Y)$ $(\forall X \subseteq I)$
- **SUB1**: $\forall Z \in \mathcal{C}(X)$, $\exists Z' \in \mathcal{C}(X')$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **SUB2**: $\forall Z' \in \mathcal{C}(X')$, $\exists Z \in \mathcal{C}(X)$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ $(\forall X' \subseteq X \subseteq I)$
- **IRC**： $Y \in \mathcal{C}(X), Y \subseteq Y' \subseteq X \implies Y \in \mathcal{C}(Y')$ $(\forall Y' \subseteq X \subseteq I)$

- $C_1, \ldots, C_k$がSUB, IRC $\Rightarrow \mathcal{C}(X) \coloneqq \{C_1(X), \ldots, C_k(X)\}$は SUB1, SUB2, IRC
- SUB1, SUB2, IRCでも合理化できないかも

  例： $\mathcal{C}(X) = \{X, \emptyset\}$ $\mathcal{C}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}, \mathcal{C}(\{a,b\}) = \{\{a,b\}, \emptyset\} \Rightarrow u(\{a,b\}) = u(\emptyset)$

選択対応に対する経路独立性

アイデア：M$^\natural$凹や順序凹は加法的関数を足しても同じクラスにとどまる
→ 加法的重みによるタイブレークに対する選択関数を考える

- 重み関数 $w\colon I \to \mathbb{R}$ $(w(X) = \sum_{i \in X} w(i))$ をタイブレークに使う
  - wが**一意最大化 (UM)**： $\mathrm{argmax}_{X \in \mathcal{X}} w(X)$が任意の$\mathcal{X} \subseteq 2^I$についてシングルトン
- UM重みwに対し，選択対応 $\mathcal{C}$ から選択関数C^wを定義：

$$\{C^w(X)\} = \mathrm{argmax}_{Y \in \mathcal{C}(X)} w(Y) \quad (\forall X \in 2^I)$$

定義

- 選択対応 $\mathcal{C}$ が**PI**： C^w が任意の UM 重み w について PI
- 選択対応 $\mathcal{C}$ が**LAD**： C^w が任意の UM 重み w について LAD

選択対応の例

- **SUB1**: $\forall Z \in \mathcal{C}(X), \exists Z' \in \mathcal{C}(X')$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ ($\forall X' \subseteq X \subseteq I$)
- **SUB2**: $\forall Z' \in \mathcal{C}(X'), \exists Z \in \mathcal{C}(X)$ s.t. $Z \cap X' \subseteq Z'$ ($\forall X' \subseteq X \subseteq I$)
- **PI**: 任意の UM 重み w について $C^w(X \cup X') = C^w(C^w(X) \cup X')$
- **LAD**: 任意の UM 重み w について $X' \subseteq X \Rightarrow |C^w(X')| \leq |C^w(X)|$

X	$\mathcal{C}_0(X)$	$\mathcal{C}_1(X)$	$\mathcal{C}_2(X)$	$\mathcal{C}_3(X)$	$\mathcal{C}_4(X)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset, \{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset, \{b\}$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset, \{c\}$
$\{a, b\}$	$\{a\}, \{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset, \{a, b\}$
$\{a, c\}$	$\{a\}, \{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset, \{a, c\}$
$\{b, c\}$	$\{b\}, \{c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{c\}$	$\emptyset, \{b, c\}$
$\{a, b, c\}$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{a, b\}, \{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\emptyset, \{a, b, c\}$
SUB1,2	✓	✓	✓	×	✓
PI	✓	✓	✓	×	×
LAD	✓	✓	×	✓	×

選択対応のクラスの関係

- 任意の PI 選択対応は SUB1,2 と IRC を満たす $(\because \mathcal{C}(X) = \{C^w(X) \mid w\text{: UM weight}\})$
- 任意の順序凹関数は PI 選択対応を誘導する [YokoteHKY'24]
- 任意の $M^\natural$凹 関数は PI と LAD の選択対応を誘導 [Fujishige&Tamura'06, Murota&Yokoi'15]

未解決: 任意の PI 選択対応は順序凹関数で合理化可能？

PI 選択対応の例 (1/2)

Kojima&Tamura&Yokoo(2018)で述べられているunique-selecting M♮凹関数の応用例をタイ有りに拡張できる

- **Responsive**: $I \cup \{\emptyset\}$上の弱順序$\succsim$と定員qに対し，順序に整合的な重みv を用いて

$$\mathcal{C}(X) = \mathrm{argmax}\{\textstyle\sum_{i \in Y} v_i \mid Y \subseteq X,\ |Y| \leq q\}$$

- **タイプ上限**: タイプ分割 $I = \bigsqcup_{t \in T} I_T$, タイプ別定員$(q_t)_{t \in T}$, 定員$q$

$$\mathcal{C}(X) = \mathrm{argmax}\{\textstyle\sum_{i \in Y} v_i \mid Y \subseteq X,\ |Y \cap I_t| \leq q_t\ (\forall t),\ |Y| \leq q\}$$

- **ソフト制約**: タイプ分割 $I = \bigsqcup_{t \in T} I_T$, タイプ別上下限$(\overline{q}_t, \underline{q}_t)_{t \in T}$, 定員$q$ $(\geq \sum_t \underline{q}_t)$

$$\mathcal{C}(X) = \mathrm{argmax}\{\textstyle\sum_{i \in Y} (1 + \epsilon^2 v_i) + \epsilon \sum_{t \in T} g(|Y \cap I_t|) \mid |Y| \leq q\}$$

where $g(x) = \min\{x, \overline{q}_t\} + \min\{x, \underline{q}_t\}$

PI 選択対応の例 (2/2)

- **均等配分**： タイプ分割 $I = \bigsqcup_{t \in T} I_T$, 目標人数$(r_t)_{t \in T}$, 定員$q$
  - 定員qを超えた場合は，$\sum_{t \in T}(r_t - |Y \cap I_t|)^2$ 最小の中で $\sum_{i \in Y} v_i$ が最大となる Y を選ぶ

$$\mathcal{C}(X) = \mathrm{argmax}\{|Y| - \epsilon \sum_{t \in T}(r_t - |Y \cap I_t|)^2 + \epsilon^2 \sum_{i \in Y} v_i \mid |Y| \leq q\}$$

evenly distributed and constrained responsive correspondence [Erdil&Kumano 2019]

- **重複予約枠**： タイプtの学生 $I_t \subseteq I$（各人が複数タイプをもつ 性別・障害・少数民族・カースト）
  - タイプtの優先枠 r_t, 定員q．各人はどれかのタイプとして割り当て
  - Iとスロット$[q]$の間の2部グラフを作成し，優先枠とは$v_i + M$，その他の枠とはv_iの重み
  - Yの評価値は，Y完全最大重みマッチングの重み（$|Y| \leq q$）．最大のものを選択

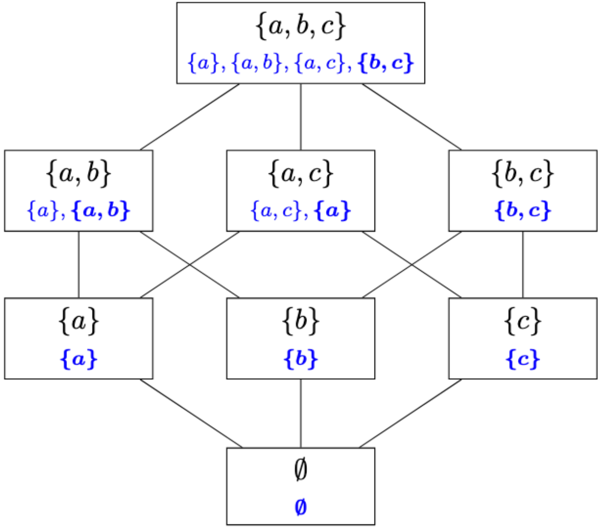
meritorious horizontal choice function [Sönmez&Yenmez 2022]

別の経路独立性の定義

Chambers, Miller, Yenmez (2015) は別のPI選択対応を定義
（ただしSSRN版のみでジャーナル版では削除）

$$\mathcal{C}(X \cup Y) = \bigcup_{X' \in \mathcal{C}(X)} \bigcup_{Y' \in \mathcal{C}(Y)} \mathcal{C}(X' \cup Y') \quad (\forall X, Y \subseteq I)$$

- 我々のPIは，Chambersら の定義を満たす
- 逆は成り立たない (右図)
  - $(w(a), w(b), w(c)) = (-3, 9, -1)$
  - $X = \{a, b, c\}, X' = \{a, c\}$でSUBが壊れる



目次

主結果：PI選択対応の性質

PI選択対応 $\mathcal{C}$ はよい性質をもつ（詳細は次のスライドから）

1. $\mathcal{C}$ は合理化可能
2. 任意の$X \in 2^I$に対し，$\mathcal{C}(X)$は**一般化マトロイド**
3. 任意のUM重みwとXに対し，$C^w(X)$は多項式時間で計算可能

   $X, Y \in 2^I$に対して$Y \in \mathcal{C}(X)$かどうかを返すメンバーシップオラクルが利用可能であると仮定

$(I, \mathcal{F})$が一般化マトロイド： $\forall X, Y \in \mathcal{F}$ かつ $e \in X \setminus Y$

- $X - e, Y + e \in \mathcal{F}$, または
- $\exists e' \in Y \setminus X$: $X - e + e', Y + e - e' \in \mathcal{F}$

合理化可能性 (1/2)

観察： 選択関数・選択対応と整合的な順序が存在すれば合理化可能

選択関数 $C\colon 2^I \to 2^I$

$\Gamma = \{C(X) \mid X \subseteq I\}$ に順序をつける

一度も選択されないものは $\emptyset$ より下位に設定

- $X = C(Z), Y \subseteq Z \implies X \succeq Y$

定理：$\succeq$ の推移的閉包が反対称律を満たすことが 合理化可能であるための必要十分条件

(strong axiom of revealed preference)

[Yang 2020; Aygün&Sönmez 2013]

選択対応 $\mathcal{C}\colon 2^I \rightrightarrows 2^I$

$\Gamma = \bigcup_{X\subseteq I} \mathcal{C}(X)$ に順序をつける

- $\{X, Y\} \subseteq \mathcal{C}(Z) \implies X \sim Y$
- $X \in \mathcal{C}(Z),\ Y \notin \mathcal{C}(Z),\ Y \subseteq Z$
  $\implies X \succ Y$

定理：$\sim$で割った順序の推移的閉包が**狭義半順序**となっていることが合理化可能であるための必要十分条件

狭義半順序：非反射的かつ推移的

$\neg(x \succ x)$ and $(x \succ y) \land (y \succ z) \Rightarrow x \succ z$

合理化可能性 (2/2)

$\psi \colon 2^I \to 2^I$ は次の3条件を満たすとき**閉包作用素**という：

(extensivity) $X \subseteq \psi(X)$, (idempotence) $\psi(\psi(X)) = \psi(X)$, (monotonicity) $X \subseteq Y \Rightarrow \psi(X) \subseteq \psi(Y)$

PI選択関数 $C \colon 2^I \to 2^I$

$$\phi(X) := \bigcup \{Y \in 2^I \mid C(X) = C(Y)\}$$

- ϕ は閉包作用素
- anti-exchange propertyも満たす
  $x, y \notin \phi(Z), y \in \phi(Z \cup \{x\}) \Rightarrow x \notin \phi(Z \cup \{y\})$
- $X{=}C(X){=}C(Y) \Leftrightarrow X{\subseteq}Y{\subseteq}\phi(X)$

[Johnson&Dean 1996; Koshevoy 1999]

PI選択関数 $\mathcal{C} \colon 2^I \rightrightarrows 2^I$

$$\tau(X) := \bigcup \{Y \in 2^I \mid \mathcal{C}(X) \cap \mathcal{C}(Y) \neq \emptyset\}$$

- **定理**：τ は閉包作用素
- $X \in \mathcal{C}(X){\cap}\mathcal{C}(Y) \Leftrightarrow X{\subseteq}Y{\subseteq}\tau(X)$
- 次は合理化関数となる

$$u(X) = \begin{cases} |\tau(X)| & \text{if } X \in \mathcal{C}(X), \\ |\tau(X)| - 1 & \text{if } X \notin \mathcal{C}(X) \end{cases}$$

一般化マトロイド構造

定理：$\mathcal{C}$がPI選択対応のとき，任意の $X \in 2^I$ について， $\mathcal{C}(X)$ は一般化マトロイド

$\forall S, T \in \mathcal{C}(X)$, $e \in S \setminus T$ (i) $S - e$, $T + e \in \mathcal{C}(X)$, or (ii) $\exists e' \in T \setminus S$: $S - e + e'$, $T + e - e' \in \mathcal{C}(X)$

系

- 任意のUM重み$w\colon I \to \mathbb{R}_{++}$に対し，$|C^w(X)| = \max\{|Y| \mid Y \in \mathcal{C}(X)\}$
- UM重み $w\colon I \to \mathbb{R}$ と $Y \in \mathcal{C}(X)$ について，$C^w(X) = Y$となる必要十分条件は $\forall u, v \in X \cup \{\varnothing\}$ with $Y + u - v \in \mathcal{C}(X)$ について $w(Y) \geq w(Y + u - v)$

計算可能性

$\mathcal{C}(X)$ は指数個の要素を含むかもしれない

- PI選択対応 $\mathcal{C}$ のメンバーシップオラクルから C^w のメンバーシップオラクルを構成可

  （一般化マトロイド構造があるので局所最適性で判定可能）

- PI選択関数 C はメンバーシップオラクルがあれば $C(X)$ を $O(|X|^3)$ 時間計算可能

- $\mathcal{C}$ が SUB1,2+IRCだと，$C^w(I)$ の計算には指数回問合せが必要なことがある
  - $\mathcal{C}(X) = \{X' \subseteq X \mid X' \in \mathcal{F}\}$ where $\mathcal{F} = \{X \subseteq I \mid |X| \leq k\}$, $|X^*| = k+1$
  - $w(j) = 1 + 1/2^j$

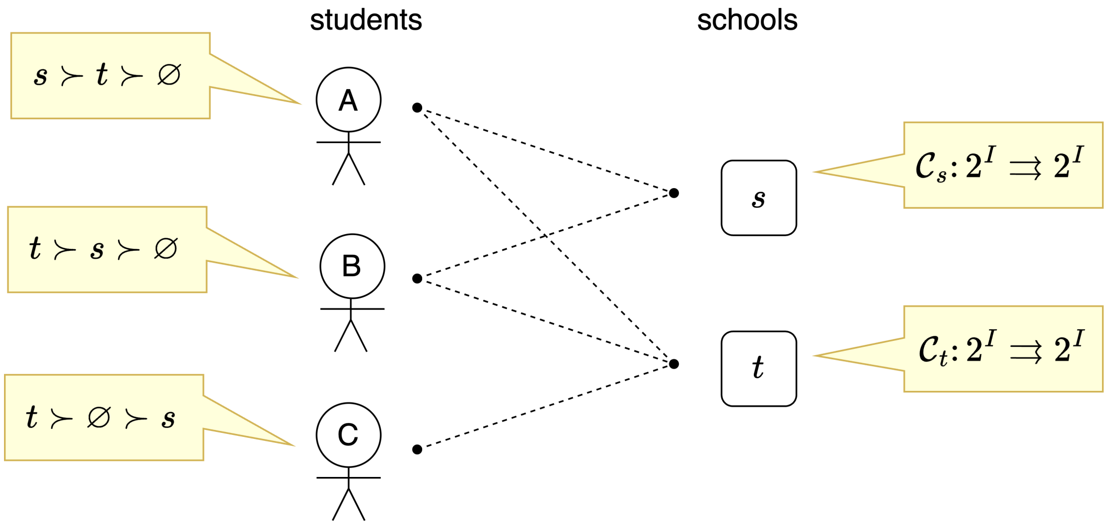
Deng, Panigrahi, Waggoner (2017)は substitutable な弱順序に対し，比較オラクルとメンバーシップオラクルを用いられるモデルについて研究（両方あれば多項式回で可能，比較オラクルだけだと指数回必要）

目次

多対一マッチング市場

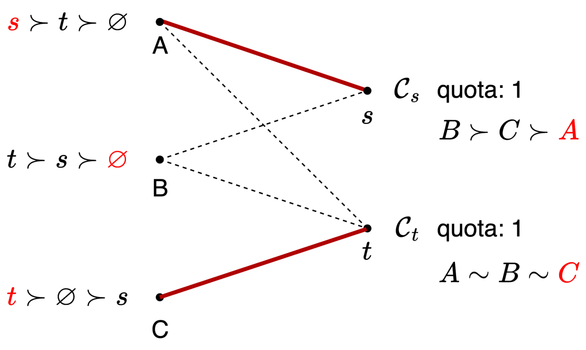
$(I, S, (\succ_i)_{i\in I}, (\mathcal{C}_s)_{s\in S})$：市場

- 各生徒 $i \in I$ は厳密順序 $\succ_i$ を $S \cup \{\varnothing\}$ 上でもつ（$\varnothing$ は未配属を表す）
- 各学校 $s \in S$ は $\mathcal{C}_s\colon 2^I \rightrightarrows 2^I$ で表される選好をもつ

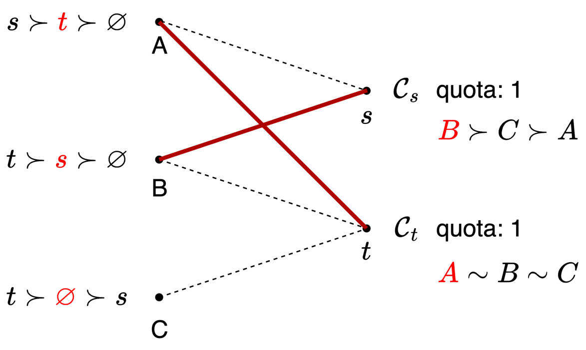


制約効率的安定マッチング

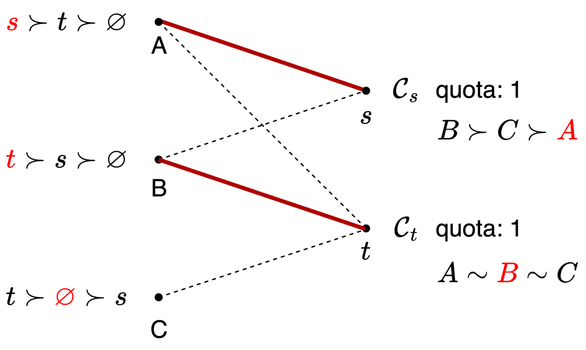
- **安定マッチング**：以下を満たすマッチング μ
  - **個人合理的**: $\forall i \in I$, $\mu(i) \succeq_i \varnothing$
  - **ブロッキング提携なし**: $\forall s \in S$, $\forall X \subseteq \{i \in I \mid s \succ_i \mu(i)\}$, $\mu(s) \in \mathcal{C}_s(\mu(s) \cup X)$
- **制約効率的安定マッチング**：Iについて安定マッチングの中でパレート効率的



非安定



安定だが効率的でない



制約効率的

受入保留方式(DA)

各学校sの選好が**PI選択関数**C_sなら，DAアルゴリズムは制約効率的マッチングを返す

[Aygün&Sönmez 2013; Roth 1984]

1. 各未配属生徒は，まだ応募していない最も高い志望校に応募
2. 各学校 s が応募者集合 X を受け取り，$X \setminus C_s(X)$ をリジェクト
3. 未配属の生徒で，$\varnothing$より望ましい未応募校があるものがいれば1に戻る

cf. https://yambi.jp/stable_matching/

タイブレーク付きDA

- 適当なUM重みwによって得られるPI選択関数C_s^wにDAを適用 → 安定マッチング
- しかし，このマッチングは制約効率的でないかもしれない

生徒 $I = \{i_1, i_2, i_3\}$ の選好：

- $i_1 : s_1 \succ s_2 \succ \varnothing \succ s_3$
- $i_2 : s_2 \succ s_1 \succ \varnothing \succ s_3$
- $i_3 : s_1 \succ s_3 \succ \varnothing \succ s_2$

学校 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ の選好 (PI)：

- s_1: $i_2 \succ i_1 \sim i_3 \succ \varnothing$, 定員1
- s_2: $i_1 \succ i_2 \succ i_3 \succ \varnothing$, 定員1
- s_3: $i_1 \succ i_2 \succ i_3 \succ \varnothing$, 定員1

DA（$w_{s_1} = (1, 2, 4)$）で得られる $\mu = \{(i_1, s_2), (i_2, s_1), (i_3, s_3)\}$ は安定

$\mu' = \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), (i_3, s_2)\}$ は μ をパレート支配する安定マッチング

PI選択対応でなくても，PI選択関数をタイブレークで作れさえすれば安定マッチングを得られるが，効率性の議論は難しい

制約効率マッチングの特徴付け

定理: 各学校の選択対応がPIかつLADであるとき，安定マッチングμについて

- μが制約効率的 $\iff$ **極大** かつ **PSIC**を含まない
- μ をパレート支配する制約効率的な安定マッチングを多項式時間で計算可能

- **極大**: $|\mu(s)| = \max\{|X| : X \in \mathcal{C}_s(\{i \in I : s \succeq_i \mu(i)\})\}$ (正UM重みタイブレークで安定)
- **PSIC**：互いに異なる生徒の列 $(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})$ で以下を満たすもの
  - $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $s_\ell := \mu(i_\ell)$
  - $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $s_{\ell+1} \succ_{i_\ell} s_\ell$
  - $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\mu(s_{\ell+1}) - i_{\ell+1} + i_\ell \in \mathcal{C}_{s_{\ell+1}}(\{i \in I \mid s_{\ell+1} \succeq_i \mu(i)\} - i_{\ell+1})$

PSICサイクルの例

PSIC：互いに異なる生徒の列 $(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})$ で以下を満たすもの
- $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $s_\ell \coloneqq \mu(i_\ell)$
- $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $s_{\ell+1} \succ_{i_\ell} s_\ell$
- $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\mu(s_{\ell+1}) - i_{\ell+1} + i_\ell \in \mathcal{C}_{s_{\ell+1}}(\{i \in I \mid s_{\ell+1} \succeq_i \mu(i)\} - i_{\ell+1})$

生徒 $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ の選好:
- $i_1 : \underline{s_1} \succ s_2 \succ \varnothing$
- $i_2 : \underline{s_2} \succ s_1 \succ \varnothing$
- $i_3 : s_1 \succ \underline{s_2} \succ \varnothing$
- $i_4 : s_2 \succ \underline{s_1} \succ \varnothing$
- $i_5 : s_1 \succ s_2 \succ \varnothing$

学校 $S = \{s_1, s_2\}$ の選好(PI):
- $\mathcal{C}_{s_1}(X) = \arg\max\{u_{s_1}(Y) : Y \subseteq X,\ |Y| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_{s_2}(X) = \arg\max\{|Y| : Y \subseteq X,\ |Y| \leq 2\}$

$$u_{s_1}(Y) = |Y \cap \{i_5\}| + 2\sqrt{|Y \cap \{i_1, i_3\}|} + 3|Y \cap \{i_2, i_4\}|$$

- $\mu = \{(i_1, s_2), (i_2, s_1), (i_3, s_2), (i_4, s_1)\}$ は安定
- PSIC (i_1, i_2, i_3, i_4) を適用した $\nu = \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), (i_3, s_1), (i_4, s_2)\}$ は不安定（$\{i_1, i_5\}$と$\{i_3, i_5\}$がブロック）
- PSIC (i_1, i_2) を適用した $\nu' = \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), (i_3, s_2), (i_4, s_1)\}$ は制約付き効率的で安定

PIでない場合のPSIC

PSIC：互いに異なる生徒の列 $(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})$ で以下を満たすもの
- $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $s_\ell \coloneqq \mu(i_\ell)$
- $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $s_{\ell+1} \succ_{i_\ell} s_\ell$
- $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\mu(s_{\ell+1}) - i_{\ell+1} + i_\ell \in \mathcal{C}_{s_{\ell+1}}(\{i \in I \mid s_{\ell+1} \succeq_i \mu(i)\} - i_{\ell+1})$

制約付き効率的安定マッチングがPSICサイクルを含むこともある

生徒 $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ の選好:
- $i_1 : s_2 \succ s_1 \succ \varnothing \succ s_3$
- $i_2 : s_1 \succ s_2 \succ \varnothing \succ s_3$
- $i_3 : s_3 \succ s_1 \succ \varnothing \succ s_2$
- $i_4 : s_1 \succ s_3 \succ \varnothing \succ s_2$

学校 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ の選好 (s_1はPIでない):
- $\mathcal{C}_{s_1}(X) = \arg\max\{|Y| : Y \in 2^X \cap (2^{\{i_1, i_2\}} \cup 2^{\{i_1, i_3\}} \cup 2^{\{i_3, i_4\}})\}$
- $\mathcal{C}_{s_2}(X) = \arg\max\{|Y| : Y \subseteq X,\ |Y| \leq 1\}$
- $\mathcal{C}_{s_3}(X) = \arg\max\{|Y| : Y \subseteq X,\ |Y| \leq 1\}$

- $\mu = \{(i_1, s_2), (i_2, s_1), (i_3, s_2), (i_4, s_1)\}$ は制約付き効率的安定マッチング
- PSIC (i_1, i_2, i_3, i_4) を適用した $\nu = \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), (i_3, s_1), (i_4, s_2)\}$ は不安定（$\emptyset$がブロック）

PSICサイクルの先行研究との関係

- Erdil&Ergin(2008) による responsive 選択対応に対するサイクル特徴付けの一般化
- Erdil&Kumano(2019) と Erdil&Kitahara&Kumano&Okumura(2022)：acceptance&bridigng選択対応に対し，PSICによる制約効率マッチングの特徴付け
  - **acceptance**: $|Y| = \min\{|X|, q\}$ for all $X \subseteq I$ and $Y \in \mathcal{C}(X)$
  - **bridging**: $\forall Y \subseteq \forall X \subseteq I$ with $|Y| \geq q$, $A \in \mathcal{C}(X)$, $B \in \mathcal{C}(Y)$ with $(Y \cap A) \subseteq B$, $\forall i \in A \setminus B$, $\exists j \in (B \setminus A) \cup ((X \setminus Y) \setminus A)$ such that $A - i + j \in \mathcal{C}(X - i)$
- 各学校sの選好がマトロイド$\mathcal{F}_s$ で $\mathcal{C}_s(X) = \{Y \in \mathcal{F}_s : Y \subseteq X\}$ と表現できる場合，PSICサイクルはTTCアルゴリズムと解釈することもできる

[Suzuki&Tamura&Yokoo2018; SuzukiTYYZ2023; Imamura&Kawase 2024]

目次

まとめと今後の課題

まとめ

- PI選択対応を導入し，合理化可能性や一般化マトロイド構造を含む性質を証明
- PI&LAD選択対応をもつ市場における，制約効率的安定マッチングのサイクル特徴付け

今後の課題

- 任意のPI選択対応は順序凹関数で合理化可能か？
- PI選択対応の束論的理解
- 多対多安定マッチングへの拡張
- PI選択対応の他の応用
- 加法的ではないタイブレーク（分離凹関数）