マッチングゲームの均衡と安定性

東京工業大学・理研 AIP

河瀬康志

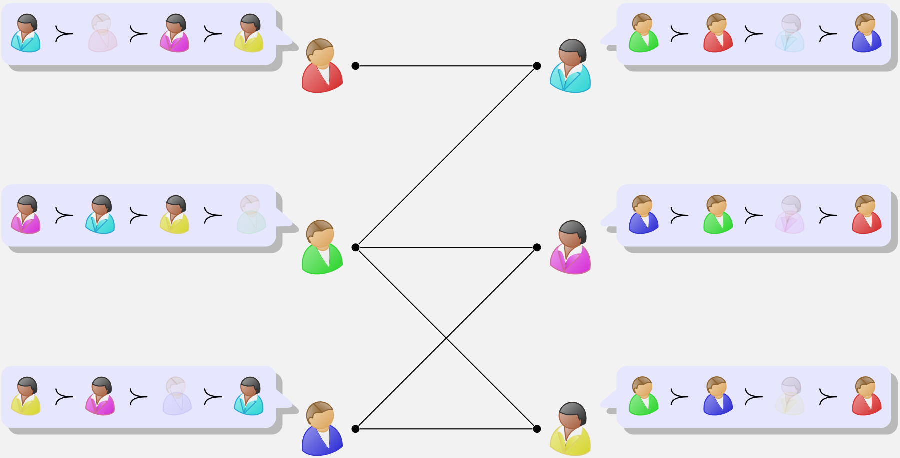
RAMP 数理最適化シンポジウム　2019 年 11 月 21 日

概要

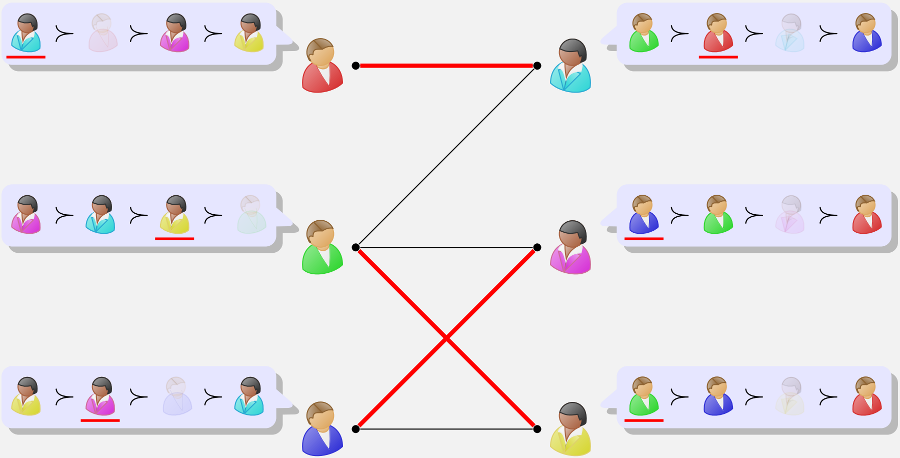
- 2 種類の異なるプレイヤー達が対峙している状況でマッチングを作る
  - 男性と女性，労働者と雇用者，学生と研究室，...
  - 各人は他方のプレイヤーたちに対して選好をもつ
- 各人の選好から望ましいマッチングを決めるメカニズムを用いる
  - 受入保留方式，逐次独裁者法，...
- 選好はプライベートな情報なので，嘘をつく人がいるかも
  $\Longrightarrow$ 均衡を用いて結果を予測

目次

安定マッチング

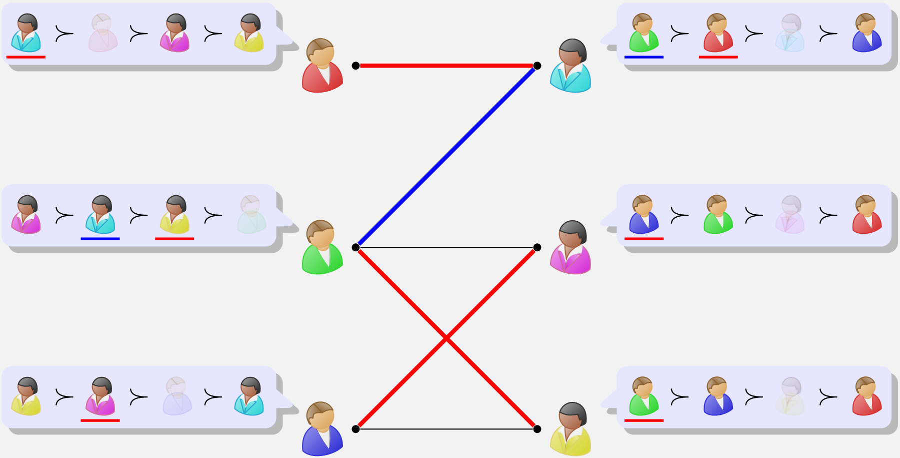


安定マッチング



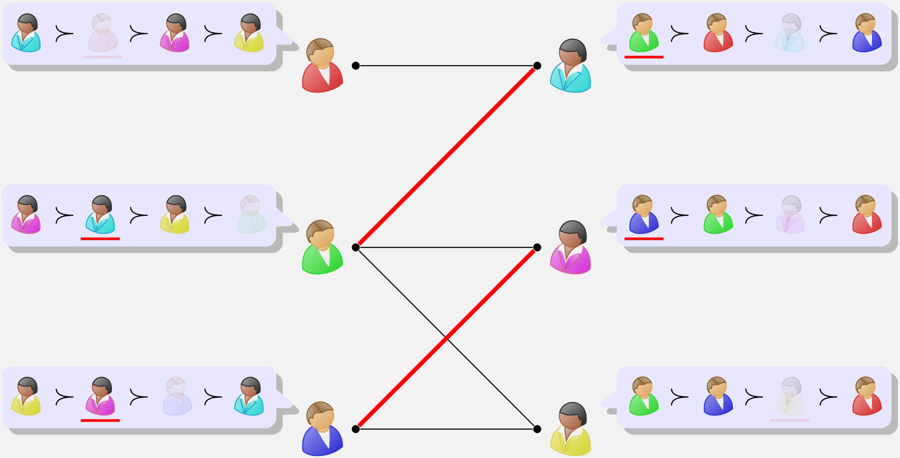
マッチング 1

安定マッチング



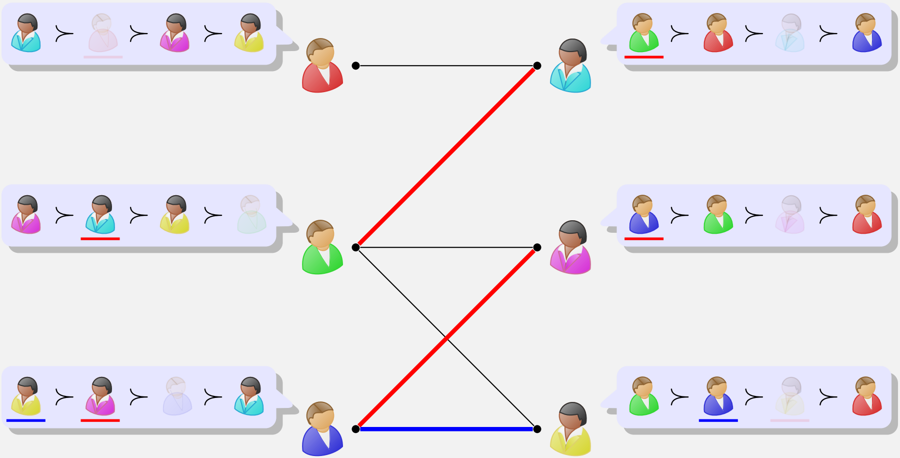
マッチング 1： と はお互いを今の相手より好む ➪ 不安定

安定マッチング



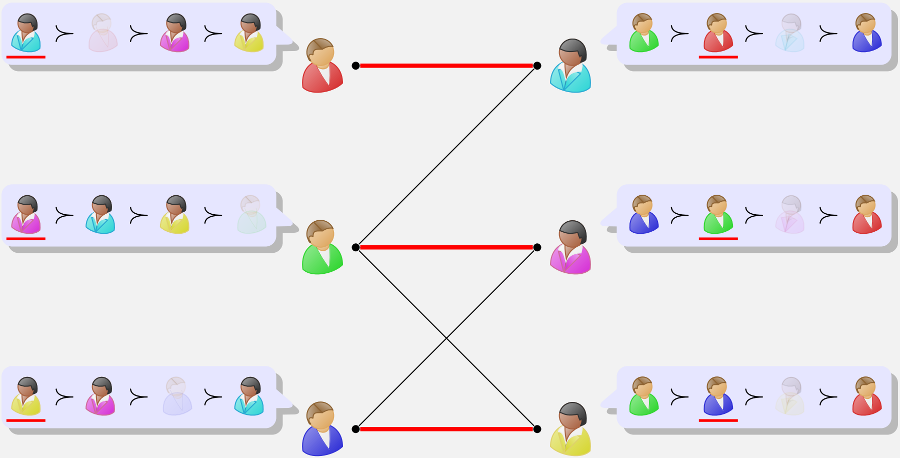
マッチング 2

安定マッチング



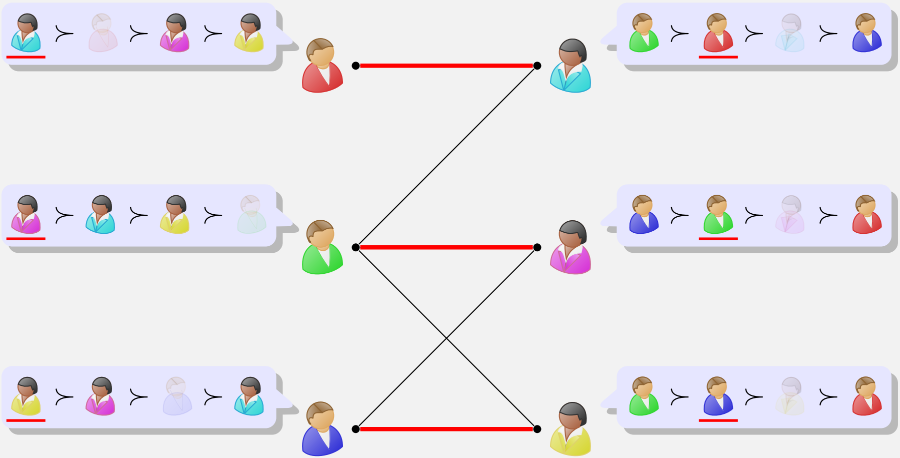
マッチング 2：とはお互いを今の相手より好む ➪ 不安定

安定マッチング



マッチング3

安定マッチング



マッチング 3 : 不安定なペアが存在しない ➪ 安定マッチング

モデル

マッチング市場 $(M, W, \succ_M, \succ_W)$

- $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$: 男性の集合
- $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$: 女性の集合
- $\succ_M = (\succ_m)_{m \in M}$: 男性の選好 ($W \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序)
- $\succ_W = (\succ_w)_{w \in W}$: 女性の選好 ($F \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序)

用語

マッチング $\mu \subseteq M \times W$ 各人が高々1組にしか含まれない

- $\mu(m) \in W \cup \{\varnothing\}$: 男性 $m \in M$ とマッチしている相手
- $\mu(w) \in M \cup \{\varnothing\}$: 女性 $w \in W$ とマッチしている相手

個人合理的 $\mu(r) \succeq_r \varnothing \ (\forall r \in M \cup W)$

ブロッキングペア $(m, w) \in F \times W$ $w \succ_m \mu(m)$ and $m \succ_w \mu(w)$

安定マッチング 個人合理的でブロッキングペアをもたないマッチング

モデル

マッチング市場 $(M, W, \succ_M, \succ_W)$

- $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$: 男性の集合
- $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$: 女性の集合
- $\succ_M = (\succ_m)_{m \in M}$: 男性の選好 ($W \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序)
- $\succ_W = (\succ_w)_{w \in W}$: 女性の選好 ($F \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序)

用語

マッチング $\mu \subseteq M \times W$ 各人が高々1組にしか含まれない
- $\mu(m) \in W \cup \{\varnothing\}$: 男性 $m \in M$ とマッチしている相手
- $\mu(w) \in M \cup \{\varnothing\}$: 女性 $w \in W$ とマッチしている相手

個人合理的 $\mu(r) \succeq_r \varnothing \ (\forall r \in M \cup W)$

ブロッキングペア $(m, w) \in F \times W$ $w \succ_m \mu(m)$ and $m \succ_w \mu(w)$

安定マッチング 個人合理的でブロッキングペアをもたないマッチング

受入保留方式 (DA) [Gale, Shapley '62; McVitie, Wilson '71]

安定マッチングは効率的に発見可能

while ∃ 独身男性 *s.t.* 受入可能でプロポーズしていない女性有り **do**
  そのような男性 m を 1 人選択し (添字最小を選ぶと仮定),
  まだプロポーズしていない中で最も好ましい女性 w にプロポーズ;
  w は，現在の相手（あるいは独身）と m の良い方を暫定受入;
return 現在の結果 DA^{M};

実行例 `https://yambi.jp/stable_matching/`

DA の性質

- 男性最適（女性最悪）な安定マッチングを出力する
  ∀ 安定マッチング μ，$\mathrm{DA}^{\mathrm{M}}(m) \succsim_m \mu(m)$ $(\forall m \in M)$ かつ $\mu(w) \succsim_w \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}(w)$ $(\forall w \in W)$
- 男女の役割を入れ替えれば女性最適な安定マッチング (DA^{W}) を出力
- 各男性は 1 人で嘘をついても得をできない (戦略的操作不可能性)
  [Dubins, Freedman '81; Roth '82]

受入保留方式 (DA) [Gale, Shapley '62; McVitie, Wilson '71]

安定マッチングは効率的に発見可能

while ∃ 独身男性 *s.t.* 受入可能でプロポーズしていない女性有り **do**
  そのような男性 m を 1 人選択し (添字最小を選ぶと仮定),
  まだプロポーズしていない中で最も好ましい女性 w にプロポーズ;
  w は，現在の相手（あるいは独身）と m の良い方を暫定受入;
return 現在の結果 DA^{M};

実行例 `https://yambi.jp/stable_matching/`

DA の性質

- 男性最適（女性最悪）な安定マッチングを出力する
  ∀ 安定マッチング μ，$\mathrm{DA}^{\mathrm{M}}(m) \succeq_m \mu(m)$ $(\forall m \in M)$ かつ $\mu(w) \succeq_w \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}(w)$ $(\forall w \in W)$
- 男女の役割を入れ替えれば女性最適な安定マッチング (DA^{W}) を出力
- 各男性は 1 人で嘘をついても得をできない (戦略的操作不可能性)
  [Dubins, Freedman '81; Roth '82]

逐次独裁者法 (SD)

別の重要なメカニズム

while ∃ 独身男性 *s.t.* 受入可能でプロポーズしていない女性有り **do**
  そのような男性 m を 1 人選択し (添字最小を選ぶと仮定),
  まだプロポーズしていない中で最も好ましい女性 w にプロポーズ;
  w は，独身であり m が受入可能ならば m を受け入れ;

$m \succ_w \varnothing$

return 現在の結果 SD;

実行例 `https://yambi.jp/stable_matching/`

SD の性質

(男性側) パレート効率的なマッチングを出力する

「$\mu(m) \succeq_m \mathrm{SD}(m)$ $(\forall m \in M)$ かつ $\mu \neq \mathrm{SD}$」であるマッチング μ が存在しない

逐次独裁者法 (SD)

別の重要なメカニズム

while ∃ 独身男性 *s.t.* 受入可能でプロポーズしていない女性有り **do**

　そのような男性 m を 1 人選択し (添字最小を選ぶと仮定),

　まだプロポーズしていない中で最も好ましい女性 w にプロポーズ;

　w は，独身であり m が受入可能ならば m を受け入れ;

$m \succ_w \varnothing$

return 現在の結果 SD;

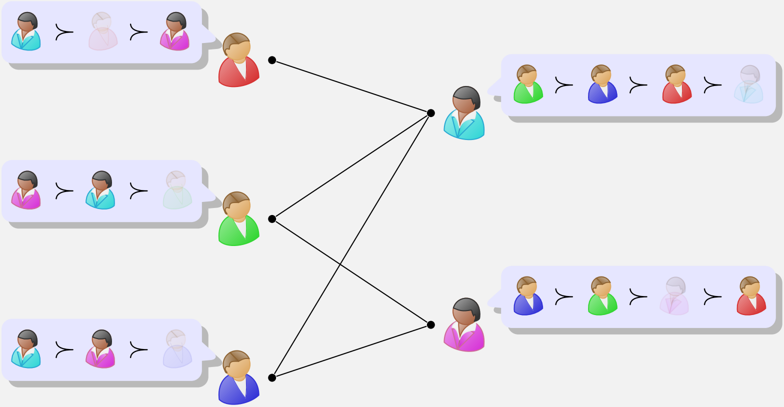
実行例 `https://yambi.jp/stable_matching/`

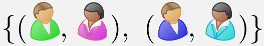
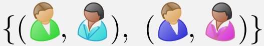
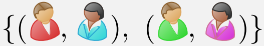
SD の性質

(男性側) パレート効率的なマッチングを出力する

「$\mu(m) \succeq_m \mathrm{SD}(m)$ $(\forall m \in M)$ かつ $\mu \neq \mathrm{SD}$」であるマッチング μ が存在しない

$\mathrm{DA^M}, \mathrm{DA^W}, \mathrm{SD}$ が異なる例



- $\mathrm{DA^M}$: 
- $\mathrm{DA^W}$: 
- SD : 

目次

戦略型マッチングゲームとナッシュ均衡

戦略型マッチングゲーム

- マッチング市場 $I = (M, W, \succ_M, \succ_W)$
- プレイヤー $N = M \cup W$
- 戦略集合 $(A_r)_{r \in N}$
  - 各 $r \in N$ は戦略集合 A_r の中からどれか 1 つの戦略を選択
- 帰結関数 $\psi \colon \prod_{r \in N} A_r \to \mathcal{M}_I$

I におけるマッチングの集合

ナッシュ均衡

どのプレーヤーも自分の戦略だけを変更することでは
より良いパートナーを得ることができない戦略の組

以下の条件を満たす戦略の組 $a \in \prod_{r \in N} A_r$:

$$\psi[a](r) \succeq_r \psi[a'_r, a_{-r}](r) \quad (\forall r \in N,\ \forall a'_r \in A_r)$$

- ナッシュ均衡は存在するとは限らない
- 存在しても複数存在するかもしれない

戦略型マッチングゲームとナッシュ均衡

戦略型マッチングゲーム

- マッチング市場 $I = (M, W, \succ_M, \succ_W)$
- プレイヤー $N = M \cup W$
- 戦略集合 $(A_r)_{r \in N}$
  - 各 $r \in N$ は戦略集合 A_r の中からどれか 1 つの戦略を選択
- 帰結関数 $\psi\colon \prod_{r \in N} A_r \to \mathcal{M}_I$

I におけるマッチングの集合

ナッシュ均衡

どのプレーヤーも自分の戦略だけを変更することでは
より良いパートナーを得ることができない戦略の組

以下の条件を満たす戦略の組 $a \in \prod_{r \in N} A_r$:

$$\psi[a](r) \succeq_r \psi[a'_r, a_{-r}](r) \quad (\forall r \in N,\ \forall a'_r \in A_r)$$

- ナッシュ均衡は存在するとは限らない
- 存在しても複数存在するかもしれない

男性側選好表明ゲーム

DA において男性だけが戦略的に選好を表明する場合

- 男性の戦略集合 $A_m = \{\ W \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}\ (m \in M)$
- 女性の戦略集合 $A_w = \{\succ_w\}\ (w \in W)$
- 帰結関数 $\psi = \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}$

定理 [Dubins, Freedman '81; Roth'82]

各男性は 1 人で嘘をついても得をできない (戦略的操作不可能性)

$\forall (M, W, \succ_M, \succ_W)$, $\forall m \in M$, $\forall \succ'_m \in A_m$,

$$\mathrm{DA}^{\mathrm{M}}[\succ_M, \succ_W](m) \succeq_m \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}[(\succ'_m, \succ_{-m}), \succ_W](m)$$

- 正直な選好の表明はナッシュ均衡の 1 つとなっている (帰結は DA^{M})
- 他にもナッシュ均衡が存在するかもしれない
- ナッシュ均衡の帰結で安定でない場合も存在

男性側選好表明ゲーム

DA において男性だけが戦略的に選好を表明する場合

- 男性の戦略集合 $A_m = \{\ W \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}\ (m \in M)$
- 女性の戦略集合 $A_w = \{\succ_w\}\ (w \in W)$
- 帰結関数 $\psi = \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}$

定理 [Dubins, Freedman '81; Roth'82]

各男性は 1 人で嘘をついても得をできない (戦略的操作不可能性)

$\forall (M, W, \succ_M, \succ_W),\ \forall m \in M,\ \forall \succ'_m \in A_m,$

$$\mathrm{DA}^{\mathrm{M}}[\succ_M, \succ_W](m) \succeq_m \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}[(\succ'_m, \succ_{-m}), \succ_W](m)$$

- 正直な選好の表明はナッシュ均衡の 1 つとなっている (帰結は DA^{M})
- 他にもナッシュ均衡が存在するかもしれない
- ナッシュ均衡の帰結で安定でない場合も存在

女性側選好表明ゲーム

DA において女性だけが戦略的に選好を表明する場合

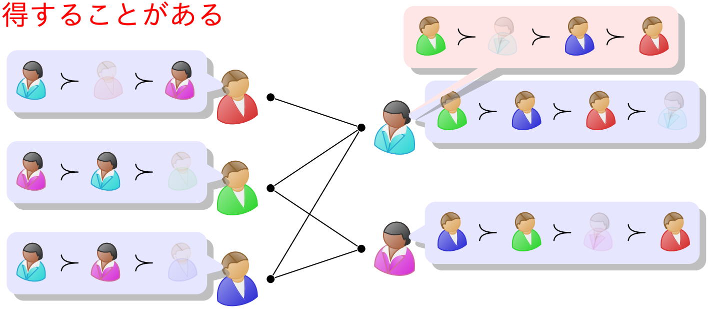
- 男性の戦略集合 $A_m = \{\succ_m\}$ $(m \in M)$
- 女性の戦略集合 $A_w = \{$ $M \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}$ $(w \in W)$
- 帰結関数 $\psi = \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}$

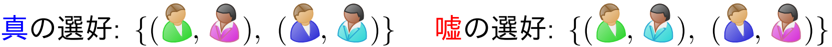
女性側選好表明ゲーム

DA において女性だけが戦略的に選好を表明する場合

- 男性の戦略集合 $A_m = \{\succ_m\}$ $(m \in M)$
- 女性の戦略集合 $A_w = \{$ $M \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}$ $(w \in W)$
- 帰結関数 $\psi = \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}$

嘘の表明で得することがある





女性側選好表明ゲーム

DA において女性だけが戦略的に選好を表明する場合

- 男性の戦略集合 $A_m = \{\succ_m\}$ $(m \in M)$
- 女性の戦略集合 $A_w = \{$ $M \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}$ $(w \in W)$
- 帰結関数 $\psi = \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}$

定理 [Roth'84; Gale, Sotomayor'85]

女性側選好表明ゲームにおいてナッシュ均衡の帰結の集合は，
安定マッチングの集合と一致する．

- 任意の安定マッチング μ に対して，
各女性 $w \in W$ が $\mu(w)$ だけを受け入れ可能とする戦略を選択すれば，
帰結が μ であるナッシュ均衡となる
- 任意のナッシュ均衡の帰結について，安定でないと仮定すると，
ブロッキングペアに含まれるか個人合理性を満たさない女性は
戦略を変更することで結果を改善できてしまう

両側選好表明ゲーム

DA において男女共に戦略的に選好を表明する場合

- 男性の戦略集合 $A_m = \{\ W \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}\ (m \in M)$
- 女性の戦略集合 $A_w = \{\ M \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}\ (w \in W)$
- 帰結関数 $\psi = \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}$

定理 [Alcalde '96]

両側選好表明ゲームにおいてナッシュ均衡の帰結の集合は，
個人合理性を満たすマッチング全体の集合と一致する．

個人合理性を満たすマッチングは，
「誰もマッチしないマッチング」などまで含んでしまうため，
両側選好表明ゲームにおける結果の予測としてナッシュ均衡は使えない

両側選好表明ゲーム

DA において男女共に戦略的に選好を表明する場合

- 男性の戦略集合 $A_m = \{\ W \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}\ (m \in M)$
- 女性の戦略集合 $A_w = \{\ M \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序 $\}\ (w \in W)$
- 帰結関数 $\psi = \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}$

定理 [Alcalde '96]

両側選好表明ゲームにおいてナッシュ均衡の帰結の集合は，
個人合理性を満たすマッチング全体の集合と一致する．

個人合理性を満たすマッチングは，
「誰もマッチしないマッチング」などまで含んでしまうため，
両側選好表明ゲームにおける結果の予測としてナッシュ均衡は使えない

SD に対する戦略型ゲーム

帰結関数が SD の場合も，DA の場合とほぼ同じ結果

定理

SD において男性だけが戦略的に選好を表明する場合，
任意のナッシュ均衡の帰結は $\mathrm{SD}[\succ_M, \succ_W]$

定理

SD において女性だけが戦略的に選好を表明する場合，
ナッシュ均衡の帰結集合は安定マッチング全体と一致

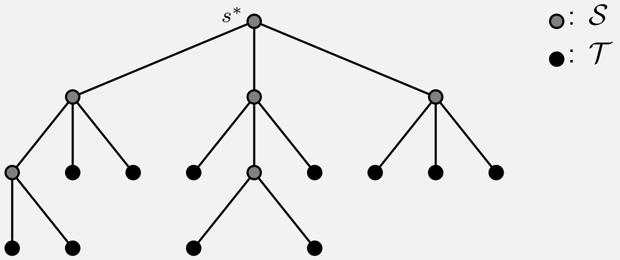
定理

SD において男女共にが戦略的に選好を表明する場合，
ナッシュ均衡の帰結集合は個人合理性を満たすマッチング全体と一致

目次

(完全情報) 展開型マッチングゲーム

- マッチング市場 $I = (M, W, \succ_M, \succ_W)$
- プレイヤー $N = M \cup W$
- 内部ノードを表す (有限) 集合 $\mathcal{S}$
- 葉ノードを表す (有限) 集合 $\mathcal{T}$
- 根 $s^* \in \mathcal{S}$
- 内部ノードとプレイヤーの対応 $\iota\colon \mathcal{S} \to N$
- 内部ノードに対する子ノード集合 $A\colon \mathcal{S} \to 2^{\mathcal{S} \cup \mathcal{T}}$
- 葉ノードとマッチングの対応 $\phi\colon \mathcal{T} \to \mathcal{M}_I$



展開型ゲームの均衡

ナッシュ均衡 (NE)

どのプレーヤーも自分の戦略だけを変更することでは
より良いマッチ相手を得ることができない戦略の組

- ナッシュ均衡は必ず存在 (完全情報ゲーム)
- 動的にゲームが進んでいるという状況を無視しているため,
  現実的ではないような戦略の組もナッシュ均衡となってしまう

部分ゲーム完全均衡 (SPE)

どの部分ゲームに対してもナッシュ均衡となる戦略の組

部分木に制限したゲーム

- 部分ゲーム完全均衡であればナッシュ均衡
- 部分ゲーム完全均衡は必ず存在 (完全情報ゲーム)
- 後ろ向き帰納法により Θ(木のサイズ) ステップで発見可能
  (ゲームがコンパクトに表現されている場合は指数ステップとなる)

目次

DA に基づく展開型マッチングゲーム

while ∃ 独身男性 *s.t.* 受入可能でプロポーズしていない女性有り **do**
  そのような男性 m を 1 人選択し (添字最小を選ぶと仮定),
  まだプロポーズしていない中で最も好ましい女性 w にプロポーズ;
  w は，現在の相手（あるいは独身）と m の良い方を暫定受入;
return 現在の結果;

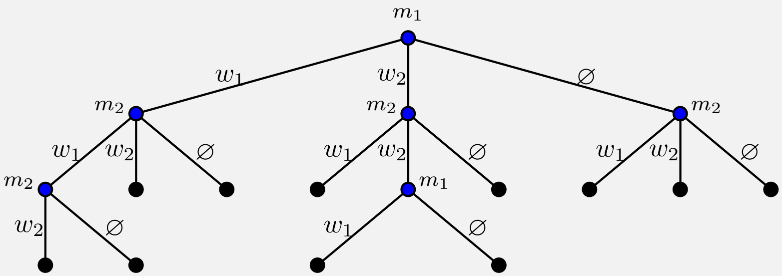
- 男性 m は，まだプロポーズしていない女性を 1 人表明するか，受入可能な女性がいないと表明
- 女性 w は，現在の相手とプロポーズしてきた相手のどちらかを選択

男性側のみが戦略的な場合の例 1

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m_1 : \; w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \varnothing \qquad w_1 : \; m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \varnothing$$

$$m_2 : \; w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \varnothing \qquad w_2 : \; m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \varnothing$$

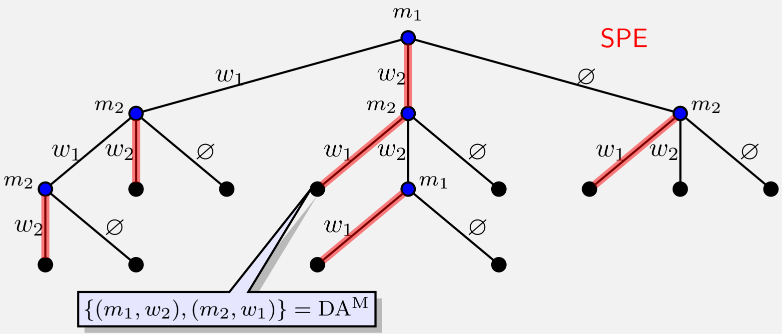


男性側のみが戦略的な場合の例１

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m_1 : \; w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \varnothing \qquad w_1 : \; m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \varnothing$$

$$m_2 : \; w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \varnothing \qquad w_2 : \; m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \varnothing$$

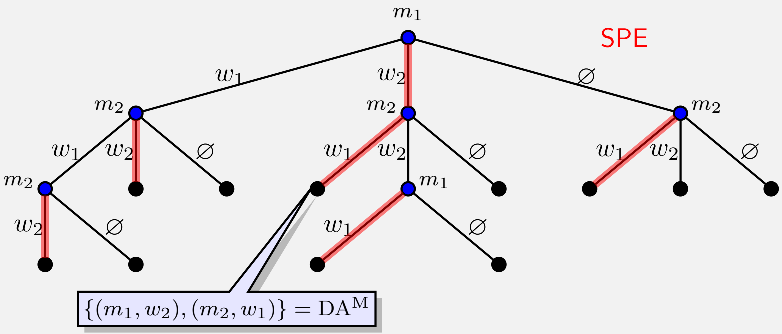


男性側のみが戦略的な場合の例 1

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m_1 : \; w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \varnothing \qquad w_1 : \; m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \varnothing$$

$$m_2 : \; w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \varnothing \qquad w_2 : \; m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \varnothing$$



他の SPE はない

男性側のみが戦略的な場合の例 2

男性最適安定マッチングになるとは限らない

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$.

$$\begin{array}{llll} m_1: & w_1 \succ_{m_1} \varnothing \succ_{m_1} w_2 \succ_{m_1} w_3 & w_1: & m_1 \succ_{w_1} \varnothing \succ_{w_1} m_1 \succ_{w_1} m_3 \\ m_2: & w_2 \succ_{m_2} w_3 \succ_{m_2} \varnothing \succ_{m_2} w_1 & w_2: & m_3 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} m_2 \succ_{w_2} \varnothing \\ m_3: & w_3 \succ_{m_3} w_2 \succ_{m_3} \varnothing \succ_{m_3} w_1 & w_3: & m_2 \succ_{w_3} m_1 \succ_{w_3} m_3 \succ_{w_3} \varnothing \end{array}$$

- SPE の帰結 1: $\{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3)\}$
  - 男性最適安定マッチング
  - 全員正直表明により達成
- SPE の帰結 2: $\{(m_1, w_1), (m_2, w_3), (m_3, w_2)\}$
  - 女性最適安定マッチング
  - m_1 が最初に w_2 にオファーし，その後は全員正直表明により達成

男性側のみが戦略的な場合の性質

男性最適安定マッチング以外のマッチングが帰結として出てくることも

定理 [Kawase, Bando '19]

男性側のみが戦略的に動く，DA に基づく展開型マッチングゲームでは

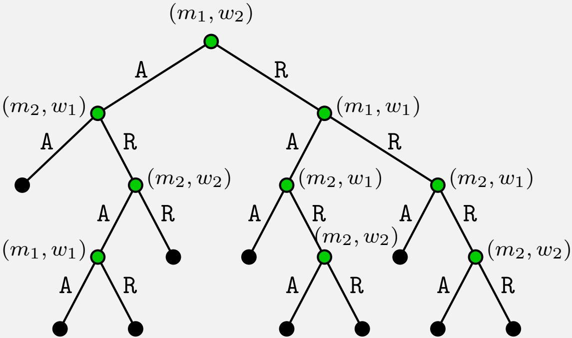
- DA^{M} を常に SPE として達成できる
- 男性側パレート最適マッチングを常に SPE として達成できる
- DA^{W} よりも任意の SPE の帰結を男性は弱い意味で好む
- マッチできる人はどの SPE の帰結でも同じ (NE では異なるかも)

女性側のみが戦略的な場合

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m_1 : \ w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \varnothing \qquad w_1 : \ m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \varnothing$$

$$m_2 : \ w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \varnothing \qquad w_2 : \ m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \varnothing$$

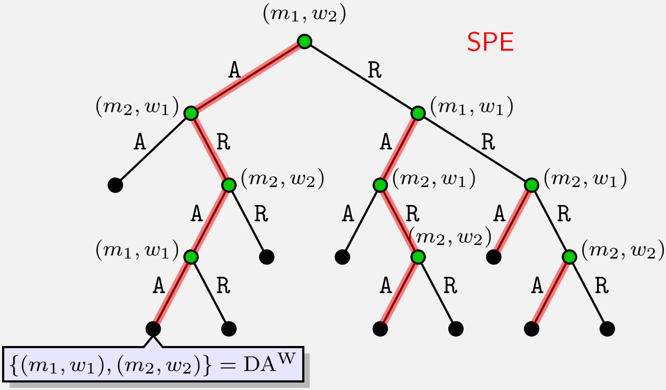


女性側のみが戦略的な場合

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m_1 : \; w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \varnothing \qquad w_1 : \; m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \varnothing$$

$$m_2 : \; w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \varnothing \qquad w_2 : \; m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \varnothing$$

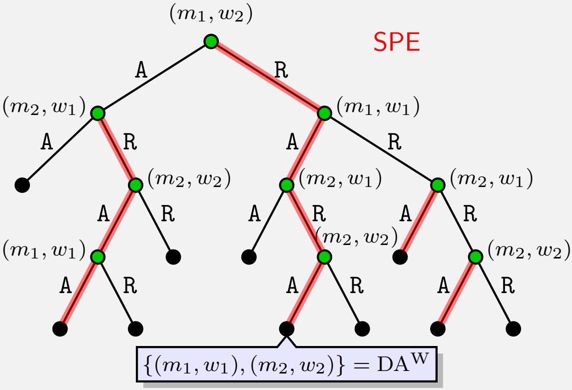


女性側のみが戦略的な場合

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m_1 : \; w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \varnothing \qquad w_1 : \; m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \varnothing$$

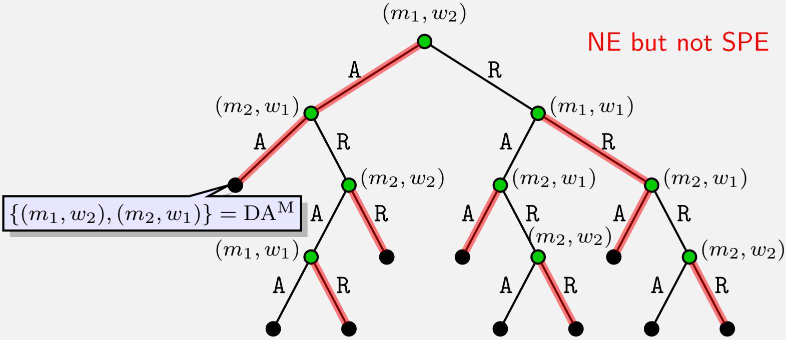
$$m_2 : \; w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \varnothing \qquad w_2 : \; m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \varnothing$$



女性側のみが戦略的な場合

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m_1 : w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \varnothing \qquad w_1 : m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \varnothing$$
$$m_2 : w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \varnothing \qquad w_2 : m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \varnothing$$



女性側のみが戦略的な場合の性質

定理 (戦略型ゲームの場合とほぼ同様の証明)

女性側のみが戦略的に動く，DA に基づく展開型マッチングゲームでは

NE の帰結集合 $=$ 安定マッチング集合

定理 [Kawase, Bando '19]

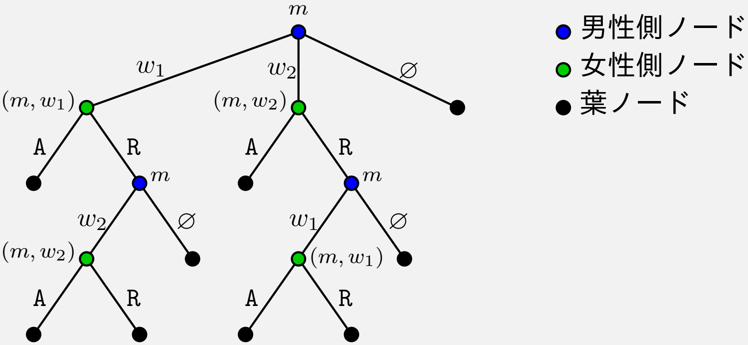
女性側のみが戦略的に動く，DA に基づく展開型マッチングゲームでは

任意の SPE の帰結 $= \mathrm{DA}^{\mathrm{W}}$

男女両側が戦略的な場合の例

$M = \{m\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m:\ w_1 \succ_m w_2 \succ_m \varnothing \qquad w_1:\ \varnothing \succ_{w_1} m$$
$$w_2:\ m \succ_{w_2} \varnothing.$$

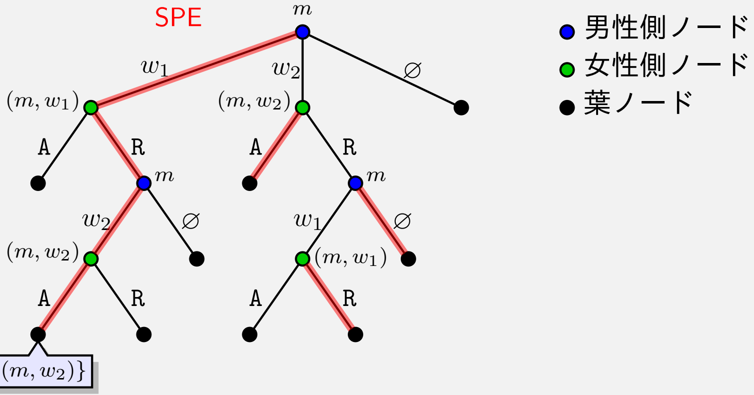


男女両側が戦略的な場合の例

$M = \{m\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m: \ w_1 \succ_m w_2 \succ_m \varnothing \qquad w_1: \ \varnothing \succ_{w_1} m$$

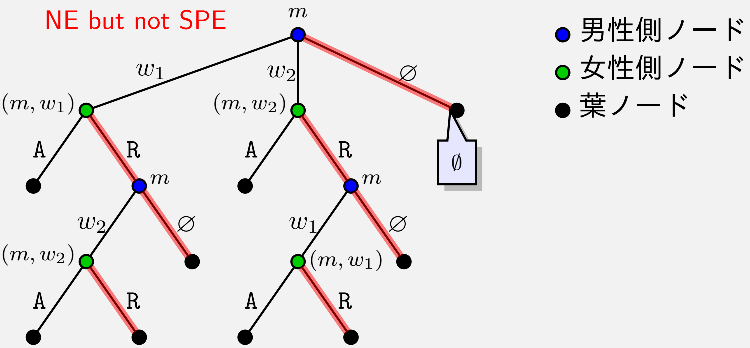
$$w_2: \ m \succ_{w_2} \varnothing.$$



男女両側が戦略的な場合の例

$M = \{m\}$, $W = \{w_1, w_2\}$

$$m: \ w_1 \succ_m w_2 \succ_m \varnothing \qquad\qquad w_1: \ \varnothing \succ_{w_1} m$$
$$w_2: \ m \succ_{w_2} \varnothing.$$



男女両側が戦略的な場合の性質

定理 (戦略型ゲームの場合とほぼ同様の証明)

男女両側が戦略的に動く，DA に基づく展開型マッチングゲームでは

NE の帰結集合 = 個人合理的マッチング集合

定理 [Kawase, Bando ’19]

男女両側が戦略的に動く，DA に基づく展開型マッチングゲームでは

任意の SPE の帰結 $= \mathrm{DA}^{\mathrm{W}}$

目次

1 マッチング市場と安定性

2 戦略型マッチングゲームとナッシュ均衡

3 展開型マッチングゲームと均衡
- DA に基づく展開型マッチングゲーム
- SD に基づく展開型マッチングゲーム

4 まとめ

SD に基づく展開型マッチングゲーム

while ∃ 独身男性 *s.t.* 受入可能でプロポーズしていない女性有り **do**
- そのような男性 m を 1 人選択し (添字最小を選ぶと仮定),
- まだプロポーズしていない中で最も好ましい女性 w にプロポーズ;
- w は，独身であり m が受入可能ならば m を受け入れ;

$m \succ_w \varnothing$

return 現在の結果;

- 男性 m は，まだプロポーズしていない女性を 1 人表明するか，受入可能な女性がいないと表明
- 女性 w は，プロポーズしてきた相手を受け入れるかどうか選択 (独身でなければ受け入れはできない)

男性側だけが戦略的である場合の帰結は，SD の結果に一致するので以降，女性側だけが戦略的である場合を考察する

各ステップで，異なる表明は異なるマッチ相手を導くことから，部分ゲーム完全均衡は一意となることに注意

SDに基づく展開型マッチングゲーム

while ∃ 独身男性 *s.t.* 受入可能でプロポーズしていない女性有り **do**
　そのような男性 m を 1 人選択し (添字最小を選ぶと仮定),
　まだプロポーズしていない中で最も好ましい女性 w にプロポーズ;
　w は，独身であり m が受入可能ならば m を受け入れ;
return 現在の結果;

$m \succ_w \varnothing$

- 男性 m は，まだプロポーズしていない女性を 1 人表明するか，受入可能な女性がいないと表明
- 女性 w は，プロポーズしてきた相手を受け入れるかどうか選択 (独身でなければ受け入れはできない)

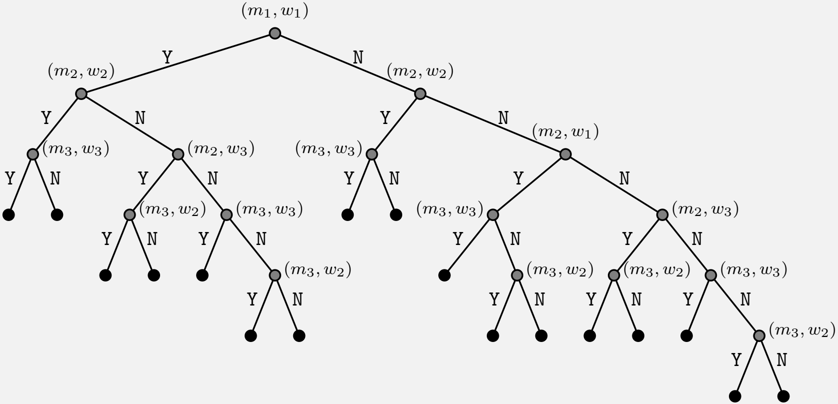
男性側だけが戦略的である場合の帰結は，SD の結果に一致するので以降，女性側だけが戦略的である場合を考察する

各ステップで，異なる表明は異なるマッチ相手を導くことから，部分ゲーム完全均衡は一意となることに注意

例

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$

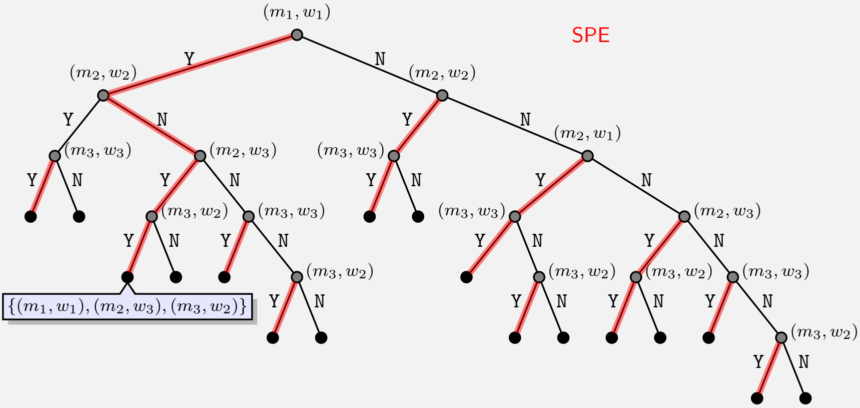
$$m_1 : \; w_1 \succ_{m_1} \varnothing \succ_{m_1} w_2 \succ_{m_1} w_3, \quad w_1 : \; m_2 \succ_{w_1} m_1 \succ_{w_1} \varnothing \succ_{w_1} m_3$$
$$m_2 : \; w_2 \succ_{m_2} w_1 \succ_{m_2} w_3 \succ_{m_2} \varnothing, \quad w_2 : \; m_3 \succ_{w_2} m_2 \succ_{w_2} \varnothing \succ_{w_2} m_1$$
$$m_3 : \; w_3 \succ_{m_3} w_2 \succ_{m_3} \varnothing \succ_{m_3} w_1, \quad w_3 : \; m_2 \succ_{w_3} m_3 \succ_{w_3} \varnothing \succ_{w_3} m_1$$



例

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$m_1 : w_1 \succ_{m_1} \varnothing \succ_{m_1} w_2 \succ_{m_1} w_3, \quad w_1 : m_2 \succ_{w_1} m_1 \succ_{w_1} \varnothing \succ_{w_1} m_3$$
$$m_2 : w_2 \succ_{m_2} w_1 \succ_{m_2} w_3 \succ_{m_2} \varnothing, \quad w_2 : m_3 \succ_{w_2} m_2 \succ_{w_2} \varnothing \succ_{w_2} m_1$$
$$m_3 : w_3 \succ_{m_3} w_2 \succ_{m_3} \varnothing \succ_{m_3} w_1, \quad w_3 : m_2 \succ_{w_3} m_3 \succ_{w_3} \varnothing \succ_{w_3} m_1$$



SPE の帰結の性質

- 部分ゲーム完全均衡の帰結の特徴付けは難しそう
  - 緩和版の安定性すら満たすとは限らない
- そこで，部分ゲーム完全均衡を計算する問題を考える

定理 [Kawase, Yamaguchi, Yokoi '18]

- 「全男性の受入可能女性 ≤ 2」or「全女性の受入可能男性 ≤ 2」
  $\Longrightarrow$ 部分ゲーム完全均衡は多項式時間で計算可能
- その他の場合は PSPACE 困難
  (全男性＆全女性の受入可能な相手が 3 人以下でも困難)

SPE の帰結の性質

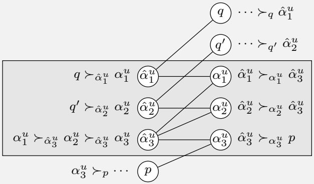
- 部分ゲーム完全均衡の帰結の特徴付けは難しそう
  - 緩和版の安定性すら満たすとは限らない
- そこで，部分ゲーム完全均衡を計算する問題を考える

定理 [Kawase, Yamaguchi, Yokoi '18]

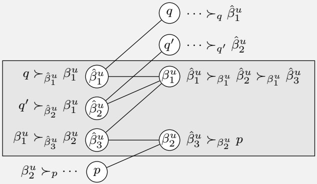
- 「全男性の受入可能女性 ≤ 2」or「全女性の受入可能男性 ≤ 2」
  $\Longrightarrow$ 部分ゲーム完全均衡は多項式時間で計算可能
- その他の場合は PSPACE 困難
  (全男性＆全女性の受入可能な相手が 3 人以下でも困難)

困難性: QUANTIFIED 3SAT から帰着

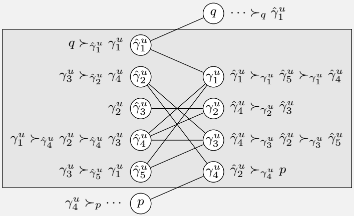
SPE の構造が複雑であるゆえに，様々なガジェットを作成可能



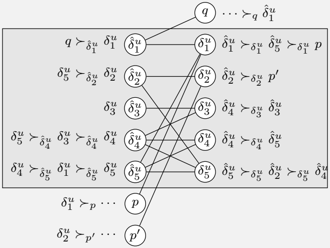
AND-gate



OR-gate

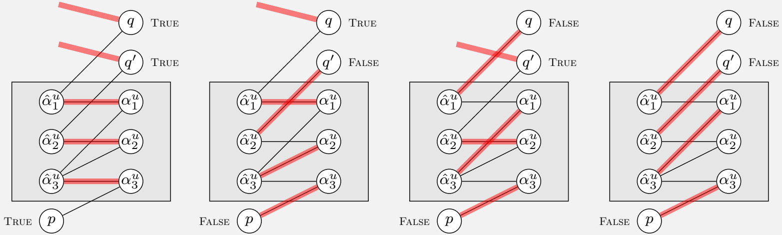


NOT-gate

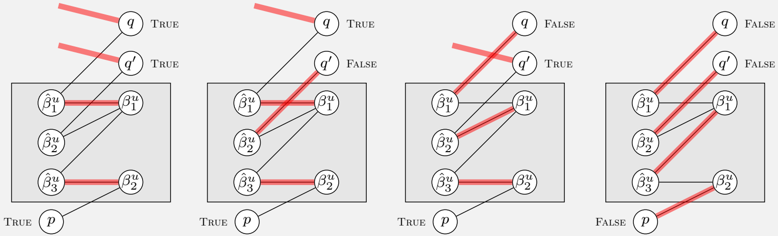


BRANCHING-gate

AND-gate, OR-gate の入出力

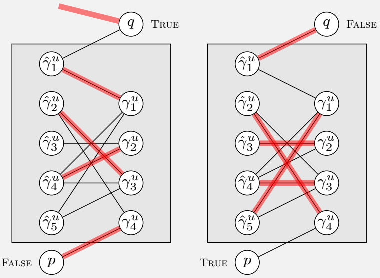


AND-gate の入出力

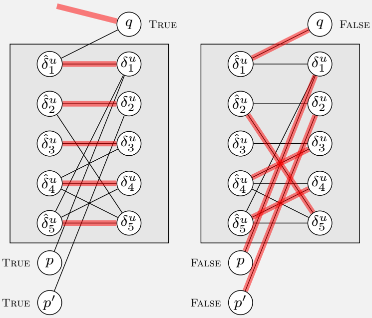


OR-gate の入出力

NOT-gate, BRANCHING-gate の入出力



NOT-gate の入出力



BRANCHING-gate の入出力

可解性

「全男性の受入可能女性 $\leq$2」or「全女性の受入可能男性 $\leq$2」
$\Longrightarrow$ 逐次固定 DA アルゴリズムによって計算可能

入力: $I = (M, W, \succ_M, \succ_W)$, **出力:** マッチング

$\hat{I} \leftarrow I$;
while $\mathrm{DA}^{\mathrm{M}}[\hat{I}] \neq \emptyset$ **do**
- $(m, w) \in \arg\min\{i \mid (m_i, w_j) \in \mathrm{DA}^{\mathrm{M}}[\hat{I}]\}$ とする;
- (m, w) のペアを確定し，$\hat{I}$ から削除;

return 現在のマッチング;

目次

まとめと今後の課題

まとめ

- 戦略型マッチングゲームと展開型マッチングゲームを紹介
- 均衡におけるマッチ結果の性質を解析

未解決の課題

- 複数プレイヤーが同時に行動する展開型マッチングゲーム
- 1 対多マッチングの場合

ご成長ありがとうございました

まとめと今後の課題

まとめ

- 戦略型マッチングゲームと展開型マッチングゲームを紹介
- 均衡におけるマッチ結果の性質を解析

未解決の課題

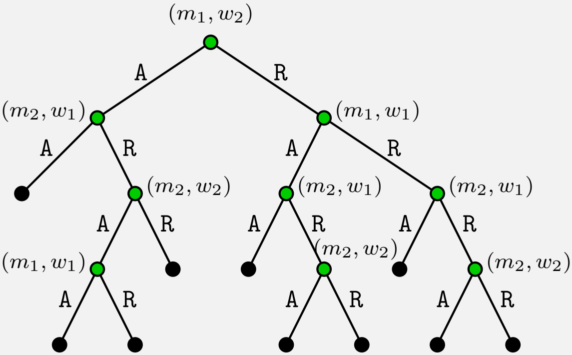
- 複数プレイヤーが同時に行動する展開型マッチングゲーム
- 1 対多マッチングの場合

ご清聴ありがとうございました

女性側展開型 DA: 多対 1 マッチングの場合

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$ (ただし w_1 のみ 2 つとマッチ可能)

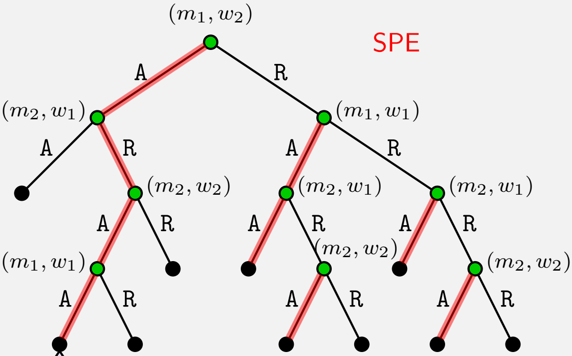
$$m_1 : \ w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \emptyset \qquad w_1 : \ m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \emptyset$$
$$m_2 : \ w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \emptyset \qquad w_2 : \ m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \emptyset.$$



女性側展開型 DA: 多対 1 マッチングの場合

$M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$ (ただし w_1 のみ 2 つとマッチ可能)

$$
\begin{aligned}
m_1 &: \; w_2 \succ_{m_1} w_1 \succ_{m_1} \emptyset & \qquad w_1 &: \; m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \emptyset \\
m_2 &: \; w_1 \succ_{m_2} w_2 \succ_{m_2} \emptyset & \qquad w_2 &: \; m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \emptyset.
\end{aligned}
$$



$\{(m_1, w_1), (f_2, w_2)\}$: blocked by (m_2, w_1)