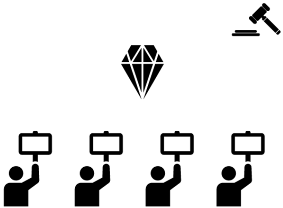
最適化アルゴリズムによる
収入最大オークションの設計

河瀬康志 (東京工業大学)

2020年9月3日

オークション問題

どのようなルールで誰に何を割り当ていくら支払わせる？



目標 支払い額の合計の(期待値)最大化

条件

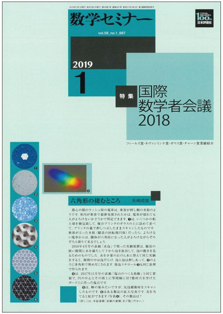
- 複数の財を複数の買い手を相手に売りたい
- 買い手は戦略的に自身の効用を最大化するように行動する
- 買い手がオークションに参加しないことも許す
- 買い手の財への評価は未知だが，評価の分布は知っている

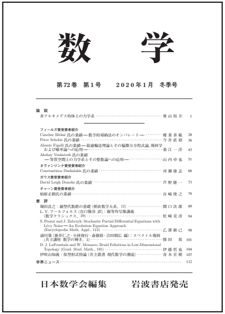
今日紹介する結果

定理 [Cai–Daskalakis–Weinberg 2012]

買い手の評価関数が加法的な場合，
収入を最大にするメカニズムは多項式時間で設計可能

最適オークション





数　学

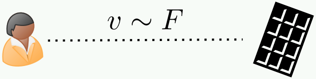
第72巻　第1号　　2020年1月　冬季号

日本数学会編集　　岩波書店発売

アウトライン

オークションの例1

- 買い手1人，財１つ
- 買い手の財の評価値
  - 200円である確率1/2
  - 300円である確率1/2

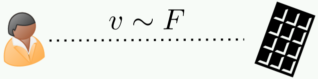


- 200円でなら確実に売れて収入200円
- 300円でなら確率1/2で売れて期待収入150円

⇒ 最適期待収入 = 200円

オークションの例1

- 買い手1人，財１つ
- 買い手の財の評価値
  - 200円である確率$1/2$
  - 300円である確率$1/2$

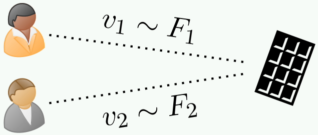


- 200円でなら確実に売れて収入200円
- 300円でなら確率$1/2$で売れて期待収入150円

⇒ 最適期待収入 $=$ 200円

オークションの例2

- 買い手2人，財１つ
- 買い手の財の評価値
  - 200円である確率1/2
  - 300円である確率1/2



- 入札額の高い方にその入札額で売る(同額の場合はランダム)
  - 2人とも評価値で入札するならば期待収入$200 \cdot \frac{1}{4} + 300 \cdot \frac{3}{4} = 275$
    しかし，評価値を安く申告すれば得することができる
  - 均衡では期待収入225

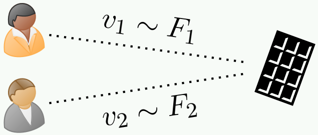
$v = 200$なら200を入札，$v = 300$なら$p \in [200, 250]$を確率密度$\frac{100}{(300-p)^2}$で入札

- 入札額の高い方に低い方の入札額で売る (同額の場合はランダム)
  - 2人とも評価値を入札するのが均衡で期待収入$200 \cdot \frac{3}{4} + 300 \cdot \frac{1}{4} = 225$

⇒ 最適期待収入 $=$ 225円

オークションの例2

- 買い手2人，財１つ
- 買い手の財の評価値
  - 200円である確率1/2
  - 300円である確率1/2



- 入札額の高い方にその入札額で売る(同額の場合はランダム)
  - 2人とも評価値で入札するならば期待収入$200\cdot\frac{1}{4}+300\cdot\frac{3}{4}=275$
    しかし，評価値を安く申告すれば得することができる
  - 均衡では期待収入225

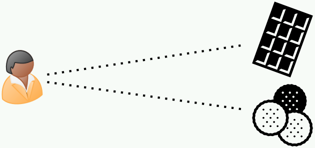
$v=200$なら200を入札，$v=300$なら$p\in[200,250]$を確率密度$\frac{100}{(300-p)^2}$で入札

- 入札額の高い方に低い方の入札額で売る (同額の場合はランダム)
  - 2人とも評価値を入札するのが均衡で期待収入$200\cdot\frac{3}{4}+300\cdot\frac{1}{4}=225$

⇨ 最適期待収入 = 225円

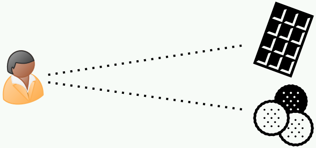
オークションの例3

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - ( , ) $= (200, 100)$である確率$1/3$
  - ( , ) $= (100, 300)$である確率$1/3$
  - ( , ) $= (200, 300)$である確率$1/3$



オークションの例3

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - (, ) $= (200, 100)$である確率$1/3$
  - (, ) $= (100, 300)$である確率$1/3$
  - (, ) $= (200, 300)$である確率$1/3$

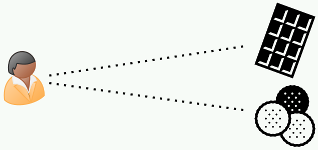


- それぞれ独立に100円と100円で売れば収入200円
- それぞれ独立に200円と300円で売れば期待収入$1000/3 \approx 333$円
- {, }のセットを300円で売れば収入300円
- {, }のセットを400円で売れば期待収入$\frac{800}{3} \approx 267$円
- {, }のセットを500円で売れば期待収入$\frac{500}{3} \approx 167$円

もっと良い売り方がある？

オークションの例3

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - (, ) $= (200, 100)$である確率$1/3$
  - (, ) $= (100, 300)$である確率$1/3$
  - (, ) $= (200, 300)$である確率$1/3$



- それぞれ独立に100円と100円で売れば収入200円
- それぞれ独立に200円と300円で売れば期待収入$1000/3 \approx 333$円
- {, }のセットを300円で売れば収入300円
- {, }のセットを400円で売れば期待収入$\frac{800}{3} \approx 267$円
- {, }のセットを500円で売れば期待収入$\frac{500}{3} \approx 167$円

もっと良い売り方がある？ ⇨ 実は最適期待収入 $= 350$円

オークションモデル

- U: 分割不可能な財(m個)
- $N = \{1, \ldots, n\}$ $(= [n])$: 買い手．各iについて以下を仮定
  - 評価関数は$v_i : 2^U \to \mathbb{R}$であり，他人は知らない．
  - 評価関数は加法的$v_i(S) = \sum_{j \in S} v_i(\{j\})$
  - $S \subseteq U$をp支払うことで受け取る嬉しさは$v_i(S) - p$ (準線形効用)
  - Sやpが確率的な場合の嬉しさは$\mathbb{E}[v_i(S) - p]$（リスク中立性）

分布に関する仮定

- 評価関数v_iは独立な分布$\mathcal{D}_i$に従って定まる
- $\mathcal{D}_i$は有限な台集合V_iをもつ
- iの評価関数がv_iである確率は$f_i(v_i)$
  - 売り手は$\mathcal{D} = \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_i$を知っている
  - 買い手iはv_iと$\mathcal{D}_{-i} = \prod_{j \neq i} \mathcal{D}_j$を知っている
- 評価関数の組が$v \in V = \prod_{i=1}^n V_i$である確率は$f(v) = \prod_{i=1}^n f_i(v_i)$

オークションモデル

- U: 分割不可能な財(m個)
- $N = \{1, \ldots, n\}$ $(= [n])$: 買い手．各iについて以下を仮定
  - 評価関数は$v_i : 2^U \to \mathbb{R}$であり，他人は知らない．
  - 評価関数は加法的$v_i(S) = \sum_{j \in S} v_i(\{j\})$
  - $S \subseteq U$をp支払うことで受け取る嬉しさは$v_i(S) - p$ (準線形効用)
  - Sやpが確率的な場合の嬉しさは$\mathbb{E}[v_i(S) - p]$（リスク中立性）

分布に関する仮定

- 評価関数v_iは独立な分布$\mathcal{D}_i$に従って定まる
- $\mathcal{D}_i$は有限な台集合V_iをもつ
- iの評価関数がv_iである確率は$f_i(v_i)$
  - 売り手は$\mathcal{D} = \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_i$を知っている
  - 買い手iはv_iと$\mathcal{D}_{-i} = \prod_{j \neq i} \mathcal{D}_j$を知っている
- 評価関数の組が$\boldsymbol{v} \in V = \prod_{i=1}^n V_i$である確率は$f(\boldsymbol{v}) = \prod_{i=1}^n f_i(v_i)$

オークションメカニズム

許されるメッセージ集合

- 各買い手$i \in N$は売り手にメッセージ$r_i \in M_i$を送る（例:入札額）
- メッセージ$(r_1, \ldots, r_n)$に基づき，以下の帰結が定まる：
  - 財の割当: $S_1, \ldots, S_n$（$S_i \cap S_j = \emptyset$ $(\forall i, j \in N)$, $\bigcup_{i \in N} S_i \subseteq U$）
  - 支払い額: $p_1, \ldots, p_n$

買い手に関する仮定

- オークションに参加しないという選択を許す
- 期待効用$\mathbb{E}[v_i(S_i) - p_i]$を最大にするように戦略的に動く

  $\rightsquigarrow$ ベイジアンナッシュ均衡となると仮定

各買い手が自身の期待効用を最大にするような選択をした状態

目標: $\mathbb{E}[\sum_{i \in N} p_i]$を最大化するようなメカニズムを設計

オークションメカニズム

許されるメッセージ集合

- 各買い手$i \in N$は売り手にメッセージ$r_i \in M_i$を送る（例:入札額）
- メッセージ$(r_1, \ldots, r_n)$に基づき，以下の帰結が定まる：
  - 財の割当: $S_1, \ldots, S_n$（$S_i \cap S_j = \emptyset \ (\forall i, j \in N)$, $\bigcup_{i \in N} S_i \subseteq U$）
  - 支払い額: $p_1, \ldots, p_n$

買い手に関する仮定

- オークションに参加しないという選択を許す
- 期待効用$\mathbb{E}[v_i(S_i) - p_i]$を最大にするように戦略的に動く

$\rightsquigarrow$ ベイジアンナッシュ均衡となると仮定

各買い手が自身の期待効用を最大にするような選択をした状態

目標: $\mathbb{E}[\sum_{i \in N} p_i]$を最大化するようなメカニズムを設計

オークションメカニズム

許されるメッセージ集合

- 各買い手$i \in N$は売り手にメッセージ$r_i \in M_i$を送る（例:入札額）
- メッセージ$(r_1, \ldots, r_n)$に基づき，以下の帰結が定まる：
  - 財の割当: $S_1, \ldots, S_n$（$S_i \cap S_j = \emptyset\ (\forall i, j \in N)$, $\bigcup_{i \in N} S_i \subseteq U$）
  - 支払い額: $p_1, \ldots, p_n$

買い手に関する仮定

- オークションに参加しないという選択を許す
- 期待効用$\mathbb{E}[v_i(S_i) - p_i]$を最大にするように戦略的に動く

$\rightsquigarrow$ ベイジアンナッシュ均衡となると仮定

各買い手が自身の期待効用を最大にするような選択をした状態

目標: $\mathbb{E}[\sum_{i \in N} p_i]$を最大化するようなメカニズムを設計

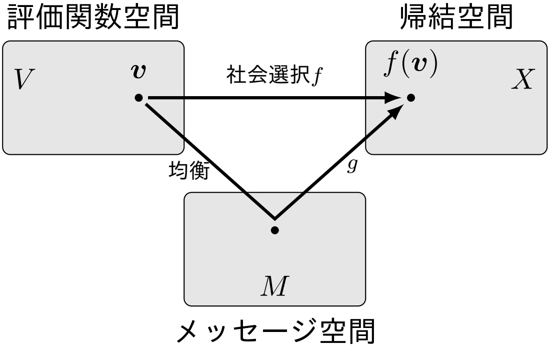
顕示原理

$f\colon (v_1,\dots,v_n) \mapsto ((S_1,\dots,S_n),(p_1,\dots,p_n))$

ある社会的選択関数があるメカニズムの均衡として実現される場合，その関数は誘因両立的な直接顕示メカニズムでも実現できる

正直が最適な戦略になる

評価関数を直接申告するメカニズム



直接顕示メカニズム

メカニズム$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$ $(:= ((\phi_{iX})_{i\in[n],X\subseteq U}, (p_i)_{i\in[n]}))$

- 各iは自身の評価関数$v_i \in V_i$を表明する
- 表明の組$\boldsymbol{v} \in V$に基づいて
  - 財集合$X \subseteq U$を買い手iに確率$\phi_{iX}(\boldsymbol{v})$で割り当て
  - 買い手iは（期待値として）$p_i(\boldsymbol{v})$だけ支払う

評価関数は加法的なので，各財の割当確率で考えてもよい

- $\{a,b\}$を確率$1/3$で割当, $\{b,c\}$を確率$2/3$で割当
- aを確率$1/3$, bを確率1，cを確率$2/3$で独立に割当

直接顕示メカニズム

メカニズム$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$ $(:= ((\phi_{iX})_{i\in[n], X\subseteq U}, (p_i)_{i\in[n]}))$

- 各iは自身の評価関数$v_i \in V_i$を表明する
- 表明の組$\boldsymbol{v} \in V$に基づいて
  - 財集合$X \subseteq U$を買い手iに確率$\phi_{iX}(\boldsymbol{v})$で割り当て
  - 買い手iは（期待値として）$p_i(\boldsymbol{v})$だけ支払う

評価関数は加法的なので，各財の割当確率で考えてもよい

- $\{a, b\}$を確率$1/3$で割当, $\{b, c\}$を確率$2/3$で割当
- aを確率$1/3$, bを確率1，cを確率$2/3$で独立に割当

簡略版直接表明メカニズム

メカニズム$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$ $(:= ((\phi_{ij})_{i\in[n], j\in U}, (p_i)_{i\in[n]}))$

- 各iは自身の評価関数$v_i \in V_i$を表明する
- 表明の組$\boldsymbol{v} \in V$に基づいて
  - 財$j \in U$を買い手iに確率$\phi_{ij}(\boldsymbol{v})$で割り当て
  - 買い手iは（期待値として）$p_i(\boldsymbol{v})$だけ支払う

- 買い手iの期待効用 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{v}_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}\left[\sum_{j\in U} v_i(j)\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v})\right]$

$$\sum_{\boldsymbol{v}_{-i}\in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j\in U} v_i(j)\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v})\right)$$

- 売り手の期待収入 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{v}\sim\mathcal{D}}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{v})\right]$

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in V} f(\boldsymbol{v}) \sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{v})$$

簡略版直接表明メカニズム

メカニズム$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$ $(:= ((\phi_{ij})_{i\in[n],j\in U}, (p_i)_{i\in[n]}))$

- 各iは自身の評価関数$v_i \in V_i$を表明する
- 表明の組$\boldsymbol{v} \in V$に基づいて
  - 財$j \in U$を買い手iに確率$\phi_{ij}(\boldsymbol{v})$で割り当て
  - 買い手iは（期待値として）$p_i(\boldsymbol{v})$だけ支払う

- 買い手iの期待効用 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{v}_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}\left[\sum_{j\in U} v_i(j)\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v})\right]$

$$\sum_{\boldsymbol{v}_{-i}\in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i})\left(\sum_{j\in U} v_i(j)\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v})\right)$$

- 売り手の期待収入 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{v}\sim\mathcal{D}}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{v})\right]$

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in V} f(\boldsymbol{v}) \sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{v})$$

メカニズムの満たすべき条件

- 各財は高々1人にしか割り当てることができない

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_{ij}(\boldsymbol{v}) \leq 1 \qquad (\forall j \in U,\ \boldsymbol{v} \in V)$$

$$\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) \geq 0 \qquad (\forall i \in [n],\ j \in U,\ \boldsymbol{v} \in V)$$

- 誘因両立性 (次のスライド)
  正直が最適な戦略となる

- 個人合理性 (次の次のスライド)
  オークションに参加することにより，効用は負にならない

誘引両立性

正直な表明がベイジアンナッシュ均衡になるという条件

ベイジアン誘因両立性(BIC)

メカニズム$(\phi, \boldsymbol{p})$がベイジアン誘因両立性を満たすとは,
∀買い手$i \in [n]$と∀評価関数$v_i, v_i' \in V_i$について,

$$\underbrace{\sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j)\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v}) \right)}_{\text{正直に}v_i\text{を表明した時の期待効用}} \geq \underbrace{\sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j)\phi_{ij}(v_i', \boldsymbol{v}_{-i}) - p(v_i', \boldsymbol{v}_{-i}) \right)}_{\text{嘘をついて}v_i'\text{を表明した時の期待効用}}$$

個人合理性

オークションに参加することにより，効用は負にならないと仮定（買い手に対し，オークションに参加しないという選択を許す）

個人合理性(IR)

メカニズム$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$が個人合理性を満たすとは，
$\forall$買い手$i \in [n]$と$\forall$評価関数$v_i \in V_i$について，

$$\underbrace{\sum_{\boldsymbol{v}_{\text{-}i} \in V_{\text{-}i}} f_{\text{-}i}(\boldsymbol{v}_{\text{-}i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j)\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v}) \right)}_{\text{買い手}i\text{の期待効用}} \geq 0$$

最適オークションの表現

最適オークションは以下の線形計画問題の最適解として表現できる

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{\boldsymbol{v} \in V} f(\boldsymbol{v}) \sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{v}) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j) \phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v}) \right) \\
& \quad \geq \sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j) \phi_{ij}(v_i', \boldsymbol{v}_{-i}) - p(v_i', \boldsymbol{v}_{-i}) \right) && (\forall i \in [n],\ v_i, v_i' \in V_i) \\
& \sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j) \phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v}) \right) \geq 0 && (\forall i \in [n],\ v_i \in V_i) \\
& \sum_{i=1}^{n} \phi_{ij}(\boldsymbol{v}) \leq 1 && (\forall j \in U,\ \boldsymbol{v} \in V) \\
& \phi_{ij}(\boldsymbol{v}) \geq 0 && (\forall i \in [n],\ j \in U,\ \boldsymbol{v} \in V)
\end{aligned}
$$

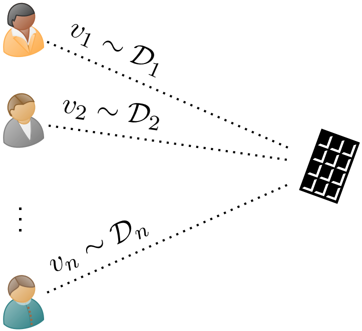
- ☺ 線形計画ソルバーを用いて最適オークションは計算できる
- ☹ 変数の数が$\Theta(mn \prod_{i=1}^{n} |V_i|)$ （入力に対して指数サイズ）

アウトライン

財が1つ$(m = 1)$

- さきほどの線形計画の変数の数は$\Theta(mn \prod_{i=1}^{n} |V_i|)$なので$m = 1$の場合でも直接解くことは難しい
- Myersonによって，最適オークションの陽な表現が与えられている

2007年ノーベル経済学賞



単一財の最適オークション [Myerson 1981]

$m = 1$の場合の最適オークション$(\phi, \boldsymbol{p})$

1. 各買い手iは売り手に自身の評価値v_iを表明
2. v_iを仮想評価値$h_i(v_i)$に変換
3. 仮想評価値が正の買い手がいるならば，その中で値が最大である買い手$i^* \in \arg\max_{i \in [n]} h_i(v_i)$に財を割り当て ($\phi_{i^*}(\boldsymbol{v}) = 1$)
4. 財を受け取った買い手から，割当を得るために最低限必要な評価値$p_{i^*} = \min\{s \mid h_i(s) \geq \max\{0, \max_{j \neq i} h_j(v_j)\}\}$ ($\in V_{i^*}$)を徴収

性質

- h_iはD_iのみによって定まる単調増加関数(簡単に計算可能)
- 評価値最大の買い手に売るわけではない
- 効率的な割当になるとは限らない
- メカニズムは決定的 (乱数を使わない)
- 正直な申告が支配戦略均衡にもなっている

単一財の最適オークション [Myerson 1981]

$m = 1$の場合の最適オークション$(\phi, \boldsymbol{p})$

1. 各買い手iは売り手に自身の評価値v_iを表明
2. v_iを仮想評価値$h_i(v_i)$に変換
3. 仮想評価値が正の買い手がいるならば，その中で値が最大である買い手$i^* \in \arg\max_{i \in [n]} h_i(v_i)$に財を割り当て ($\phi_{i^*}(\boldsymbol{v}) = 1$)
4. 財を受け取った買い手から，割当を得るために最低限必要な評価値$p_{i^*} = \min\{s \mid h_i(s) \geq \max\{0, \ \max_{j \neq i} h_j(v_j)\}\}$ $(\in V_{i^*})$を徴収

性質

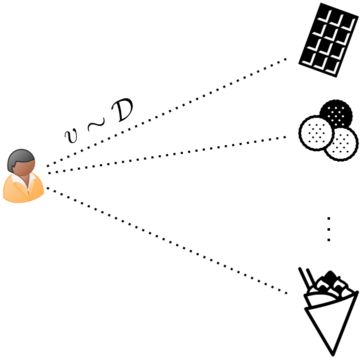
- h_iはD_iのみによって定まる単調増加関数(簡単に計算可能)
- 評価値最大の買い手に売るわけではない
- 効率的な割当になるとは限らない
- メカニズムは決定的 (乱数を使わない)
- 正直な申告が支配戦略均衡にもなっている

アウトライン

買い手が1人

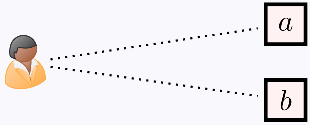
- 財が複数の場合は，Myersonのメカニズムを単純に拡張することは難しいことを確認する

- ただし，LPを解くことにより最適オークションは求められる
  さきほどの線形計画の変数の数は$\Theta(mn\prod_{i=1}^{n}|V_i|)$
  $\rightsquigarrow n = 1$の場合は多項式サイズ



例1

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - $(v_a, v_b) = (100, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (100, 200)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 200)$である確率$1/4$



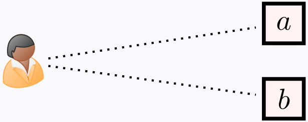
- 最適オークション:

$$
\begin{aligned}
&\phi_a(100,100) = 0, && \phi_b(100,100) = 0, && p(100,100) = 0,\\
&\phi_a(100,200) = 1, && \phi_b(100,200) = 1, && p(100,200) = 300,\\
&\phi_a(200,100) = 1, && \phi_b(200,100) = 1, && p(200,100) = 300,\\
&\phi_a(200,200) = 1, && \phi_b(200,200) = 1, && p(200,200) = 300
\end{aligned}
$$

- 期待収入: $\sum_{v \in V} f(v)p(v) = 225$

例1

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - $(v_a, v_b) = (100, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (100, 200)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 200)$である確率$1/4$



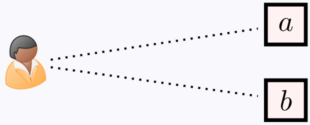
- 最適オークション:

$$
\begin{aligned}
\phi_a(100,100) &= 0, & \phi_b(100,100) &= 0, & p(100,100) &= 0,\\
\phi_a(100,200) &= 1, & \phi_b(100,200) &= 1, & p(100,200) &= 300,\\
\phi_a(200,100) &= 1, & \phi_b(200,100) &= 1, & p(200,100) &= 300,\\
\phi_a(200,200) &= 1, & \phi_b(200,200) &= 1, & p(200,200) &= 300
\end{aligned}
$$

- 期待収入: $\sum_{v \in V} f(v)p(v) = 225$

例1

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - $(v_a, v_b) = (100, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (100, 200)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 200)$である確率$1/4$



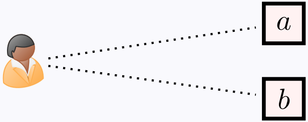
- 最適オークション:

$$\begin{aligned}
\phi_a(100,100) &= 0, & \phi_b(100,100) &= 0, & p(100,100) &= 0,\\
\phi_a(100,200) &= 1, & \phi_b(100,200) &= 1, & p(100,200) &= 300,\\
\phi_a(200,100) &= 1, & \phi_b(200,100) &= 1, & p(200,100) &= 300,\\
\phi_a(200,200) &= 1, & \phi_b(200,200) &= 1, & p(200,200) &= 300
\end{aligned}$$

- 期待収入: $\sum_{v \in V} f(v)p(v) = 225$
- 2つの財をセットで300円で売ると解釈できる

例1

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - $(v_a, v_b) = (100, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (100, 200)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 200)$である確率$1/4$



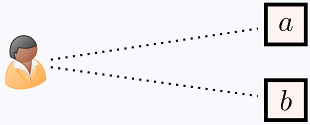
- 最適オークション:

$$\begin{aligned}
&\phi_a(100,100)=0, && \phi_b(100,100)=0, && p(100,100)=0,\\
&\phi_a(100,200)=1, && \phi_b(100,200)=1, && p(100,200)=300,\\
&\phi_a(200,100)=1, && \phi_b(200,100)=1, && p(200,100)=300,\\
&\phi_a(200,200)=1, && \phi_b(200,200)=1, && p(200,200)=300
\end{aligned}$$

- 期待収入: $\sum_{v \in V} f(v)p(v) = 225$
- 2つの財をセットで300円で売ると解釈できる
- 各財を独立に売ると200円しか得られない

例1

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - $(v_a, v_b) = (100, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (100, 200)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 100)$である確率$1/4$
  - $(v_a, v_b) = (200, 200)$である確率$1/4$



- 最適オークション:

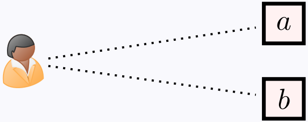
$$\begin{aligned}
&\phi_a(100,100) = 0, \quad &\phi_b(100,100) = 0, \quad &p(100,100) = 0,\\
&\phi_a(100,200) = 1, \quad &\phi_b(100,200) = 1, \quad &p(100,200) = 300,\\
&\phi_a(200,100) = 1, \quad &\phi_b(200,100) = 1, \quad &p(200,100) = 300,\\
&\phi_a(200,200) = 1, \quad &\phi_b(200,200) = 1, \quad &p(200,200) = 300
\end{aligned}$$

- 期待収入: $\sum_{v \in V} f(v)p(v) = 225$

各財の価値に関する分布が独立であったとしても，
それぞれの財について独立に最適オークションを設計では，
全体として最適オークションになるとは限らない！

例2

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - $(v_a, v_b) = (200, 100)$である確率1/3
  - $(v_a, v_b) = (100, 300)$である確率1/3
  - $(v_a, v_b) = (200, 300)$である確率1/3



- 最適オークション:

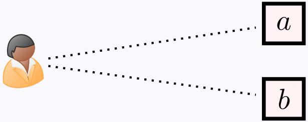
$$\begin{aligned} &\phi_a(200,100) = 1, \quad \phi_b(200,100) = 0.5, \quad p(200,100) = 250, \\ &\phi_a(100,300) = 1, \quad \phi_b(100,300) = 1, \quad p(100,300) = 400, \\ &\phi_a(200,300) = 1, \quad \phi_b(200,300) = 1, \quad p(200,300) = 400 \end{aligned}$$

- 期待収入: $\sum_{v \in V} f(v)p(v) = 350$

最適オークションでは乱数（くじ）を使う必要あり

例2

- 買い手1人，財2つ
- 買い手の財の評価値
  - $(v_a, v_b) = (200, 100)$である確率$1/3$
  - $(v_a, v_b) = (100, 300)$である確率$1/3$
  - $(v_a, v_b) = (200, 300)$である確率$1/3$



- 最適オークション:

$$
\begin{aligned}
&\phi_a(200,100) = 1, \quad \phi_b(200,100) = 0.5, \quad p(200,100) = 250,\\
&\phi_a(100,300) = 1, \quad \phi_b(100,300) = 1, \quad p(100,300) = 400,\\
&\phi_a(200,300) = 1, \quad \phi_b(200,300) = 1, \quad p(200,300) = 400
\end{aligned}
$$

- 期待収入: $\sum_{v \in V} f(v)p(v) = 350$

最適オークションでは乱数（くじ）を使う必要あり

その他の性質

$n = 1, m = 2$でも以下のような例が知られている

- 最適メカニズムと決定的最適メカニズムでの期待収入を比べると，その比はいくらでも大きくなり得る[Briest et al 2010; Hart and Nisan 2013]
- 単調性がない場合あり [Hart and Reny 2012]

  $F(x) \leq G(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$であったとしても， 2つの財の価値が独立に$F$に従う方が独立に$G$に従うよりも最適利益が小さい場合がある
- 連続分布の場合は，メニュー(売る選択肢)が無限に必要な場合あり [Daskalakis et al. 2013]

アウトライン

メカニズムのコンパクトな表現

$\prod_{i=1}^{n} |V_i|$

- オークションメカニズムを陽に表現するためには，$|V|$種類の表明それぞれに割当と価格を定める必要があるため，指数サイズ必要
- そこで，メカニズムの表現サイズを小さくするために，各買い手に対して割当と価格を独立に定める誘導形を考える
- 2つのタスクの解決を目指す
  - 誘導形としての最適オークションの表現を効率よく求める
  - 誘導形で表されたオークションをうまく実行する

誘導形

メカニズム$(\phi, \boldsymbol{p})$の誘導形$(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{q})$

$$\pi_{ij}(v_i) := \mathbb{E}_{\boldsymbol{v}_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}}[\phi_{ij}(v_i, \boldsymbol{v}_{-i})] = \sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \phi_{ij}(v_i, \boldsymbol{v}_{-i}),$$

$$q_i(v_i) := \mathbb{E}_{\boldsymbol{v}_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}}[p_i(v_i, \boldsymbol{v}_{-i})] = \sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) p_i(v_i, \boldsymbol{v}_{-i})$$

- $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$を事後ルール，$(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{q})$を後者を中間ルールと呼ぶ
- 買い手iが$v_i \in V_i$を表明したとき，
  - $\pi_{ij}(v_i) =$ 財jが割り当てられる確率
  - $q_i(v_i) =$ 期待支払い価格
- 1つの中間ルールに対応する事後ルールは複数ありうるが，どの事後ルールでも期待収入は同じ

中間ルールを用いたBICの表現

事後ルールとしてのBIC

$\forall i \in [n],\ v_i, v_i' \in V_i,$

$$\sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j)\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v}) \right) \geq \sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j)\phi_{ij}(v_i', \boldsymbol{v}_{-i}) - p(v_i', \boldsymbol{v}_{-i}) \right)$$

v_i を表明した時の期待効用　　v_i' を表明した時の期待効用

中間ルールとしてのBIC

$\forall i \in [n],\ v_i, v_i' \in V_i,$

$$\sum_{j \in U} v_i(j)\pi_{ij}(v_i) - q_i(v_i) \geq \sum_{j \in U} v_i(j)\pi_{ij}(v_i') - q_i(v_i')$$

v_i を表明した時の期待効用　　v_i' を表明した時の期待効用

中間ルールを用いたIRの表現

事後ルールとしてのIR

$\forall i \in [n],\ v_i \in V_i,$

$$\sum_{\boldsymbol{v}_{-i} \in V_{-i}} f_{-i}(\boldsymbol{v}_{-i}) \left(\sum_{j \in U} v_i(j)\phi_{ij}(\boldsymbol{v}) - p_i(\boldsymbol{v}) \right) \geq 0$$

中間ルールとしてのIR

$\forall i \in [n],\ v_i \in V_i,$

$$\sum_{j \in U} v_i(j)\pi_{ij}(v_i) - q_i(v_i) \geq 0$$

中間ルールを用いた実行可能性

「各財は高々1人にしか割り当てることができない」という条件の不等式系により表現

Borderの定理 [Border 1999; Border 2007; Che et al. 2013]

$$P[\mathcal{D}] := \left\{ \boldsymbol{\pi} \in [0,1]^{[n]\times U} \;\middle|\; \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{v_i \in S_i} f_i(v_i)\pi_{ij}(v_i)}_{S_i\text{に属す評価関数をもつ買い手}i\text{に財}j\text{が割り当てられる確率}} \le \underbrace{1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \sum_{v_i \in S_i} f_i(v_i)\right)}_{\text{少なくとも1人の買い手}i\text{の評価関数が}S_i\text{に属す確率}} \quad \begin{pmatrix} \forall j \in U, \\ \forall S_1 \subseteq V_1, \\ \vdots \\ \forall S_n \subseteq V_n \end{pmatrix} \right\}$$

- 実行可能であるための必要条件となっていることは明らか
- 十分条件であることは最大流最小カット定理により得られる
- $\boldsymbol{\pi}$に関する線形不等式系として表現されている
- 不等式の数は$m \cdot \prod_{i=1}^{n} 2^{|V_i|}$

中間ルールを用いた最適オークションの定式化

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{v_i \in V_i} q_i(v_i) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in U} v_i(j)\pi_{ij}(v_i) - q_i(v_i) \geq 0 && (\forall i \in [n],\ v_i \in V_i), \\
& \sum_{j \in U} v_i(j)\pi_{ij}(v_i) - q_i(v_i) \geq \sum_{j \in U} v_i(j)\pi_{ij}(v_i') - q_i(v_i') && (\forall i \in [n],\ v_i, v_i' \in V_i), \\
& \boldsymbol{\pi} \in P[\mathcal{D}].
\end{aligned}
$$

- ☺ 変数の数が$\Theta(m \sum_{i=1}^{n} |V_i|)$個の線形計画問題として表現できた
- ☹ 制約の数が$\Theta(m \prod_{i=1}^{n} 2^{|V_i|})$本もあるため，単純には効率的に最適解を求めることができない
- ☹ 最適な中間ルール$(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{q}^*)$が求まっても，対応する事後ルール$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$における割当や価格を効率的に求める方法が自明ではない

楕円体法に基づくテクニック

線形計画問題の制約条件が陽に与えられていない状況であっても，
分離問題が効率よく解ければ，最適化も効率よくできる

多面体$Q := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r \mid \sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i \leq b_j \ (j = 1, \ldots, t)\}$に対する分離問題

点$\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^r$が与えられたとき，$\hat{\boldsymbol{x}} \in Q$であるかどうかを判定し，
$\hat{\boldsymbol{x}} \notin Q$ならば$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{x}_i > b_j$となる$j$をみつける問題

定理 [Grötschel, Lovász, Schrijver 1981]

有界なr次元多面体Qについて，分離問題が多項式時間で解けるとき

- 任意の$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^r$に対して，$\arg\max\{\sum_{i=1}^{r} w_i x_i \mid \boldsymbol{x} \in Q\}$を多項式時間で求めることができる;
- 任意の$\boldsymbol{x} \in Q$について，Qの端点$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{r+1}$と非負実数$\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$で，$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i = 1$かつ$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$を満たすもの($r+1$個の端点の凸結合による表現)を多項式時間でみつけられる．

Borderの定理の強化

定理 [Cai, Daskalakis, Weinberg 2012; Alaei 2012]

多面体$P[\mathcal{D}]$に対する分離問題は多項式時間で解ける.

- 中間ルールを用いた線形計画問題による定式化では$P[\mathcal{D}]$以外の線形制約は多項式本だけなので，多項式時間で最適解を求められる

  $\rightsquigarrow$ 最適オークションの中間ルールは多項式時間で計算できる

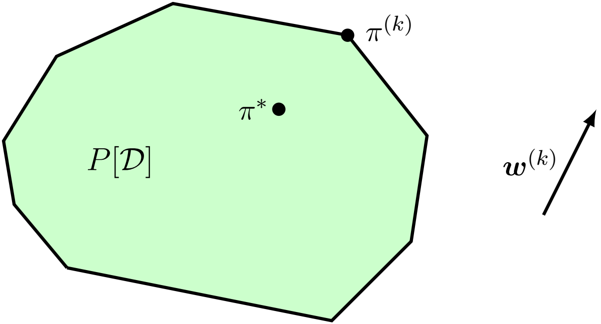
- しかし，表明vに対応する割当と価格がなにかはわからない

端点の凸結合による表現

最適オークションの中間ルールとしての表現を$(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{q}^*)$とする

- $(m\sum_{i=1}^{n}|V_i|+1)$個の$P[\mathcal{D}]$の端点の凸結合による$\boldsymbol{\pi}^*$の表現$\boldsymbol{\pi}^*=\sum_k \lambda_k \boldsymbol{\pi}^{(k)}$は，多項式時間でみつけられる
- 多面体$P[\mathcal{D}]$の端点$\boldsymbol{\pi}^{(k)}$は，線形関数を最大化した点であるので，ある(効率的に計算可能な)重み$\boldsymbol{\omega}^{(k)}$が存在して

$$\left\{\boldsymbol{\pi}^{(k)}\right\} = \arg\max \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{v_i \in V_i} \sum_{j \in U} \omega_{ij}^{(k)}(v_i)\pi_{ij}(v_i) \;\middle|\; \boldsymbol{\pi} \in P[\mathcal{D}] \right\}$$



仮想評価関数

- 端点の凸結合による表現はできたので，あとは端点に対応する割当を求められればよい
  - $\boldsymbol{\pi}^* = \sum_k \lambda_k \boldsymbol{\pi}^{(k)}$
  - $\left\{\boldsymbol{\pi}^{(k)}\right\} = \arg\max \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{v_i \in V_i} \sum_{j \in U} \omega_{ij}^{(k)}(v_i)\pi_{ij}(v_i) \;\middle|\; \boldsymbol{\pi} \in P[\mathcal{D}] \right\}$
- 仮想評価関数への変換方法$\boldsymbol{h}^{(k)}$を$h_{ij}^{(k)}(v_i) = \dfrac{\omega_{ij}^{(k)}(v_i)}{f_i(v_i)}$とすると

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{v_i \in V_i} \sum_{j \in U} \omega_{ij}^{(k)}(v_i)\pi_{ij}(v_i)} = \boxed{\sum_{\boldsymbol{v} \in V} f(\boldsymbol{v}) \sum_{i=1}^n \sum_{j \in U} h_{ij}^{(k)}(v_i)\phi_{ij}(\boldsymbol{v})}$$

$w_{ij}^{(k)}$についての中間割当の重み　　　$\boldsymbol{h}^{(k)}$についての仮想厚生

$\rightsquigarrow \boldsymbol{\pi}^{(k)}$に対応する事後割当は仮想厚生を最大化のもの

- 仮想厚生最大化は，各財を仮想評価値が最大の買い手に割り当てる(全員の仮想評価値が負の場合は誰にも割り当てない)ことにより実現可能

最適オークションの特徴付け [Cai, Daskalakis, Weinberg 2012]

最適オークション$(\phi, \boldsymbol{p})$

1. 各買い手iは売り手に自身の評価値v_iを表明
2. 最適な中間ルール$(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{q}^*)$を計算し，$P[\mathcal{D}]$の端点の凸結合による表現$\boldsymbol{\pi}^* = \sum_k \lambda_k \boldsymbol{\pi}^{(k)}$および対応する$\boldsymbol{h}^{(k)}$を求め，仮想評価関数への変換方法$\boldsymbol{h}$を確率$\lambda_k$で$\boldsymbol{h}^{(k)}$を取るようにランダムに選択
3. 各財jについて，仮想評価値が正の買い手がいるなら，その中で値が最大の買い手$i^* \in \arg\max_{i \in [n]} h_{ij}(v_i)$に財を割当
4. 各買い手iからq_i^*だけ徴収

Myersonの結果の自然な拡張

アウトライン

まとめ

定理 [Cai–Daskalakis–Weinberg 2012]

買い手の評価関数が加法的な場合,
収入を最大にするメカニズムは多項式時間で設計可能

その後の研究

- 加法的ではない場合

  [Cai–Daskalakis–Weinberg 2013; Haghpanah–Hartline 2015; Carroll 2016; Cai–Zhao 2017]

- 近似的な収入最大化だけど，もっとシンプルなメカニズム

  [Chawla–Hartline–Kelinberg 2007; Hart–Nisan 2012; Cai–Devanur–Weinberg 2016]

- 評価関数の分布はサンプルによってしかわからない

  [Morgenstern–Roughgarden 2015; Syrgkanis 2017; Cai–Daskalaksi 2017; Gonczarowski–Weinberg 2018; Brustle–Cai–Daskalakis 2020]

ご清聴ありがとうございました

まとめ

定理 [Cai–Daskalakis–Weinberg 2012]

買い手の評価関数が加法的な場合，
収入を最大にするメカニズムは多項式時間で設計可能

その後の研究

- 加法的ではない場合
  [Cai–Daskalakis–Weinberg 2013; Haghpanah–Hartline 2015; Carroll 2016; Cai–Zhao 2017]
- 近似的な収入最大化だけど，もっとシンプルなメカニズム
  [Chawla–Hartline–Kelinberg 2007; Hart–Nisan 2012; Cai–Devanur–Weinberg 2016]
- 評価関数の分布はサンプルによってしかわからない
  [Morgenstern–Roughgarden 2015; Syrgkanis 2017; Cai–Daskalaksi 2017; Gonczarowski–Weinberg 2018; Brustle–Cai–Daskalakis 2020]

ご清聴ありがとうございました