

数理情報工学特論第一 第7回

河瀬 康志

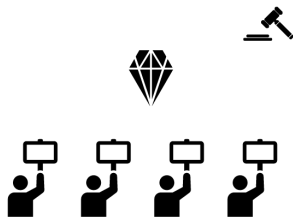
2022 年 11 月 25 日

last update: 3:18pm, November 25, 2022

スケジュール

1. ゲーム理論の基礎 (10/7)
2. マッチング 1 (10/14)
3. マッチング 2 (10/21)
4. 公平割当 1 (10/28)
5. 公平割当 2 (11/4)
6. オークション 1 (11/11)
7. オークション 2 (11/25)

望ましいオークション



理想的なオークション

- 耐戦略的 (正直申告が支配戦略)
- 参加することで損をしない 参加者から強制的に 100 万円を徴収のようなことはダメ
- 結果の計算を効率的に (多項式時間で) できる
- 社会的余剰が最大 **前回**
- 売り手の収入が最大 **今回**

アウトライン

- 1 Bayes 的環境
- 2 収入最大オークション
- 3 近似最適収入オークション
- 4 演習

単純な設定での収入最大化

- 1つの財についてオークションを行う
 - 入札者が1人で財の価値を v と評価している (v は本人だけ知っている)
 - どのようなルールで売れば良い？
-
- 1位価格封印入札 → 嘘の入札額 0 で支払い 0
 - 2位価格封印入札 → 真の入札額 v で支払い 0
 - 価格 r で売る (leave it or take it offer) → $v \geq r$ なら売れるが...
 - r をどのように決める？
 - $r = v$ とできれば最適だが可能？

もう少し仮定が必要

Bayes 的単一財オークションのモデル

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$: 入札者集合
- $F_1, \dots, F_n$: 独立な分布 (全員が知っている)
 - F_i のサポートは $V_i := [0, h]$ とする
 - 簡単のため対応する確率密度関数 f_i は連続とする
- 入札者 i による財の評価値 $v_i \sim F_i$ (本人だけが知っている)
- p_i 支払うことで財を落札したときの効用は $v_i - p_i$ (準線形効用)
- 確率的な結果に対する効用は $v_i \cdot \Pr[\text{落札確率}] - \mathbb{E}[p_i]$ (リスク中立的)

目標 期待収入 $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n p_i]$ を最大にするメカニズムの設計

ただし、入札者は戦略的な行動を行い、参加しないという選択肢があるとする
強制的にお金を回収するというのはダメ

オークションメカニズム

- 各入札者 $i \in N$ は売り手に入札額 $b_i \in V_i$ を送る
- 入札額ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ に従って**帰結**を定める：
 - $x_i(\mathbf{b}) \in [0, 1]$: 入札者 $i \in N$ への割当確率 ($\sum_{i \in N} x_i(\mathbf{b}) \leq 1$)
 - $p_i(\mathbf{b}) \in \mathbb{R}_+$: 入札者 $i \in N$ の (期待) 支払額
- $i \in N$ は戦略 $\beta_i: V_i \rightarrow V_i$ を選択
- $i \in N$ が評価値 $v_i \in V_i$ においてメッセージ b を選択したとき、期待効用は $u_i[b|v_i] := v_i \cdot \bar{x}_i(b) - \bar{p}_i(b)$

$\mathbb{E}_{v_{-i}}[x_i(b, \beta_{-i}(v_{-i}))]$ $\mathbb{E}_{v_{-i}}[p_i(b, \beta_{-i}(v_{-i}))]$
- 選ばれる戦略 $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ は**Bayes-Nash 均衡**になるのが妥当
支配戦略均衡よりも弱い概念

$u_i[\beta_i(v_i)|v_i] \geq u_i[b|v_i] \quad (\forall i \in N, v_i \in V_i, b \in V_i)$

例: 2 人での 1 位価格オークション

$[0, 1]$ 上の一様分布

評価額の分布が 2 人とも $U[0, 1]$ の場合:

- 対称な均衡 $\beta = \beta_1 = \beta_2$ について考察する

簡単のため微分可能, 狭義単調増加, $\beta(0) = 0$ であると仮定

- 期待効用は $u_1[b|v_1] = (v_1 - b) \cdot \Pr_{v_2}[b > \beta(v_2)] = (v_1 - b) \cdot \beta^{-1}(b)$
- 均衡条件より, $b = \beta(v_1)$ において最大なので
 - $\frac{d}{dt}(v_1 - \beta(t))t = v_1 - (t\beta(t))'$ は $t = v_1$ で 0
 - 積分すると $v_1\beta(v_1) = v_1^2/2$ となり, $\beta(v_1) = v_1/2$
- $\beta(v) = v/2$ のとき, $u_1[b|v_1] = (v_1 - b) \cdot \Pr_{v_2}[b > v_2/2] = 2b(v_1 - b)$
→ $b = \beta(v_1) = v_1/2$ が最適戦略なので, 確かに均衡となっている
- 期待収入は $\mathbb{E}_{v_1, v_2}[\max(v_1/2, v_2/2)] = 1/3$

cf. $U[0, 1]$ から n 個サンプルした k 番目に大きい値の期待値は $(n+1-k)/(n+1)$

例: 2 人での 2 位価格オークション

$[0, 1]$ 上の一様分布

評価額の分布が 2 人とも $U[0, 1]$ の場合：

- 正直申告 ($\beta(t) = t$) は Bayes–Nash 均衡
 $\because u_1[b|v_1] = \mathbb{E}_{v_2}[(v_1 - v_2) \cdot \mathbf{1}_{b > v_2}]$ であり，期待値の中身は v_2 によらず $b = v_1$ で最大
- 期待収入は $\mathbb{E}_{v_1, v_2}[\min(v_1, v_2)] = 1/3$

1 位価格オークションでの期待収入と一致．これは偶然？

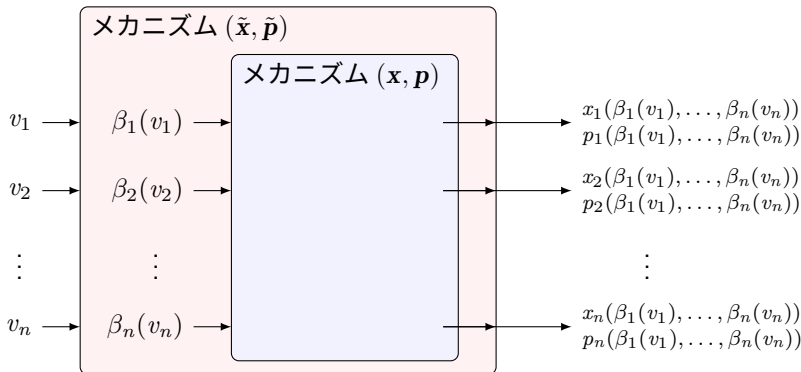
→ 同じ割当ルールは同じ収入をもたらすという収入同値定理が成立

1 位・2 位価格オークションはどちらも均衡では評価値最大の入札者に割り当てるという割当ルールとなっている

以下，収入同値定理の証明を目指す

定理

オークションメカニズム (x, p) に対し β が Bayes–Nash 均衡であると仮定
このとき，正直申告が Bayes–Nash 均衡であり同じ帰結をもたらすような
オークションメカニズム $(\tilde{x}, \tilde{p})$ が存在する



以下，正直申告が Bayes–Nash 均衡となる (BIC) メカニズムだけを考える

定理

正直申告が Bayes-Nash 均衡

$(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ が **Bayesian Incentive Compatible (BIC)** メカニズムであるとき

- $x_i(v, v_{-i})$ は v について単調非減少
- $p_i(v, v_{-i}) = v \cdot x_i(v, v_{-i}) - \int_0^v x_i(t, v_{-i}) dt - p_i(0, v_{-i})$

入札者 i と v_{-i} を fix して, $x(v) := x_i(v, v_{-i})$, $p(v) := p_i(v, v_{-i})$ とする

- BIC 条件より
 - $v \cdot x(v) - p(v) \geq v \cdot x(w) - p(w)$ (真の評価値が v で嘘の入札 w)
 - $w \cdot x(w) - p(w) \geq w \cdot x(v) - p(v)$ (真の評価値が w で嘘の入札 v)
- まとめると $w \cdot (x(v) - x(w)) \leq p(v) - p(w) \leq v \cdot (x(v) - x(w))$
- 両サイドをみると $(v - w) \cdot (x(v) - x(w)) \geq 0$
→ $x(v)$ は v について単調非減少

Myerson の補題

定理

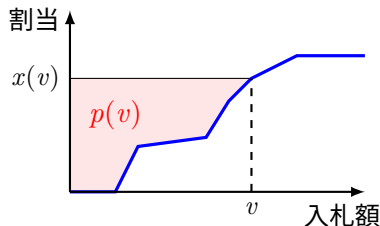
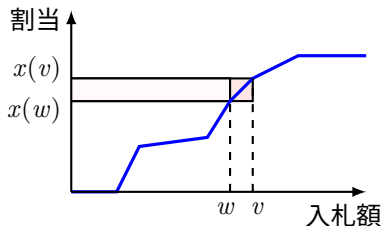
正直申告が Bayes-Nash 均衡

(x, p) が **Bayesian Incentive Compatible (BIC)** メカニズムであるとき

- $x_i(v, v_{-i})$ は v について単調非減少
- $p_i(v, v_{-i}) = v \cdot x_i(v, v_{-i}) - \int_0^v x_i(t, v_{-i}) dt - p_i(0, v_{-i})$

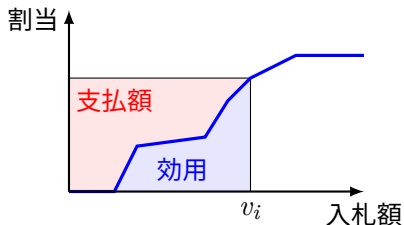
入札者 i と v_{-i} を fix して, $x(v) := x_i(v, v_{-i})$, $p(v) := p_i(v, v_{-i})$ とする

- $w \cdot (x(v) - x(w)) \leq p(v) - p(w) \leq v \cdot (x(v) - x(w))$
- 入札額の微小変化での支払額変化を考えると右図の面積が $p(v)$ – 積分定数



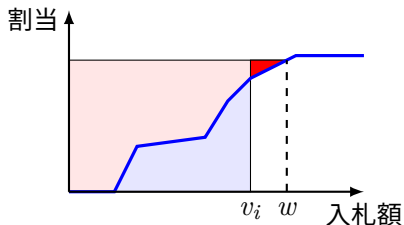
BICになることの確認

$$p_i(v, v_{-i}) = v \cdot x_i(v, v_{-i}) - \int_0^v x_i(t, v_{-i}) dt - p_i(0, v_{-i})$$

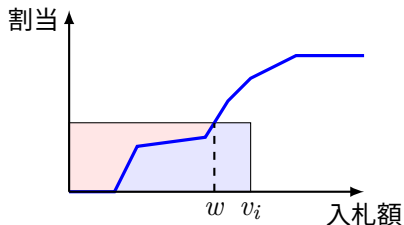


- $p_i(0, v_{-i}) = 0$ と仮定 (参加して損をしない)
- 正直申告での期待効用は

$$v_i \cdot x_i(v_i) - p_i(v_i) = \int_0^{v_i} x_i(t) dt$$



過剰入札は支払い額増で損



過小入札も割当が減り損

収入同値定理

定理

次の条件を満たすメカニズムは Bayes–Nash 均衡での期待収入が等しい

- 入札額が 0 である入札者の支払いが 0
- Bayes–Nash 均衡での割当が等しい

証明 顕示原理と Myerson の補題を適用

- メカニズム (x, p) において均衡が β だとすると、期待収入は

$$\sum_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim F} \left[v_i \cdot x_i(\beta(\mathbf{v})) - \int_0^{\beta_i(v_i)} x_i(t, \beta_{-i}(v_{-i})) dt \right]$$

- よって、 $x_i(\beta(\mathbf{v}))$ が等しければ、期待収入は変わらない

アウトライン

- 1 Bayes 的環境
- 2 収入最大オークション
- 3 近似最適収入オークション
- 4 演習

単一入札者の場合

これ以降，入札額が 0 である入札者の支払いは 0 であると仮定
収入同値定理より，1 位価格・2 位価格オークションが収入最大？

→ NO! 割当ルールを変えればよい

入札者が 1 人で，評価額の分布が F の場合：

- 入札者に「必ず」財を割り当てる → 期待収入は 0
- $v \geq r$ ならば割当 (leave it or take it offer)
 - 支払額は $v < r$ なら 0, $v \geq r$ ならば r
 - 期待収入は $r \cdot (1 - F(r))$ ，最適期待収入は $\max_r r \cdot (1 - F(r))$

$F = U[0, 1]$ のとき， $r = 1/2$ で期待収入 $1/4$

Myerson の定理

定理

BIC メカニズム (x, p) において

$$\underbrace{\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim F} \left[\sum_{i \in N} p_i(\mathbf{v}) \right]}_{\text{期待収入}} = \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim F} \left[\sum_{i \in N} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v}) \right]}_{\text{実質社会的余剰}}$$

実質評価値 $\varphi_i(v) := v - \frac{1 - F_i(v)}{f_i(v)}$

証明 i, v_{-i} を固定し，添字を省略して書くと

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{v \sim F}[p(v)] &= \int_0^h (v \cdot x(v) - \int_0^v x(t) dt) f(v) dv \\ &= \int_0^h v \cdot x(v) f(v) dv - \int_0^h \int_0^v x(t) dt f(v) dv \\ &= \int_0^h v \cdot x(v) f(v) dv - \int_0^h \int_t^h x(t) f(v) dv dt \\ &= \int_0^h v \cdot x(v) f(v) dv - \int_0^h x(t) [1 - F(t)] dt \\ &= \int_0^h \left[v - \frac{1 - F(v)}{f(v)} \right] x(v) f(v) dv \\ &= \int_0^h \varphi(v) x(v) f(v) dv = \mathbb{E}_{v \sim F}[\varphi(v) \cdot x(v)] \end{aligned}$$

Myerson の定理

定理

BIC メカニズム (x, p) において

$$\underbrace{\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} \left[\sum_{i \in N} p_i(\mathbf{v}) \right]}_{\text{期待収入}} = \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} \left[\sum_{i \in N} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v}) \right]}_{\text{実質社会的余剰}}$$

実質評価値 $\varphi_i(v) := v - \frac{1 - F_i(v)}{f_i(v)}$

証明 (続き)

$\mathbb{E}_{v_i \sim F_i} [p_i(v_i, v_{-i})] = \mathbb{E}_{v_i \sim F_i} [\varphi_i(v_i, v_{-i}) \cdot x(v_i, v_{-i})]$ なので,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} \left[\sum_{i \in N} p_i(\mathbf{v}) \right] &= \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} [p_i(v_i, v_{-i})] \\ &= \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{v_{-i} \sim F_{-i}} \left[\mathbb{E}_{v_i \sim F_i} [p_i(v_i, v_{-i})] \right] \\ &= \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{v_{-i} \sim F_{-i}} \left[\mathbb{E}_{v_i \sim F_i} [\varphi_i(v_i) \cdot x_i(v_i, v_{-i})] \right] \\ &= \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} [\varphi_i(v_i) \cdot x_i(v_i, v_{-i})] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} \left[\sum_{i \in N} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(v_i, v_{-i}) \right] \end{aligned}$$

Myerson の定理

定理

BIC メカニズム (x, p) において

$$\underbrace{\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} \left[\sum_{i \in N} p_i(\mathbf{v}) \right]}_{\text{期待収入}} = \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} \left[\sum_{i \in N} \underbrace{\varphi_i(v_i)}_{\text{実質社会的余剰}} \cdot x_i(\mathbf{v}) \right]$$

実質評価値 $\varphi_i(v) := v - \frac{1-F_i(v)}{f_i(v)}$

- 収入最大化は実質社会的余剰を最大化する割当ルールで達成 (ただし、割当は単調非減少でなくてはならない)
- 実質評価値 $\varphi_i(v)$ が v について単調非減少な場合 (F_i が regular), 実質評価値が非負で最大の入札者 i^* に割り当てれば単調性を満たす
一様分布, 指数分布, ガウス分布は regular. multi-modal な分布は irregular
- i^* の支払額は, i^* に財が割り当てられるために必要な最小入札額 $\inf \{ t \mid \varphi_{i^*}(t) \geq \max \{ 0, \max_{j \neq i^*} \varphi_j(v_j) \} \}$
- このメカニズムは BIC なだけでなく耐戦略的 (支配戦略均衡)

例 1: n 人, $F_1 = \dots = F_n = U[0, 1]$

- 実質評価値 $\varphi(v) = v - \frac{1-F_i(v)}{f_i(v)} = v - \frac{1-v}{1} = 2v - 1$ ($v \in [0, 1]$)
- 実質社会的余剰 $\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}} \left[\sum_{i \in N} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v}) \right]$ 最大の割当は
 - $\max_i v_i < 1/2 \implies$ 割当なし
 - $\max_i v_i \geq 1/2 \implies$ 評価値 (入札額) 最大の入札者に割当
- この割当ルールは単調性を満たすので実行可能
(実際, 留保価格 $1/2$ の 2 位価格オークションとなっている)

より一般に, regular な独立同一分布に対する収入最大オークションは,
 $\varphi^{-1}(0)$ を留保価格とする 2 位価格オークションとなる

人数によらない!

例 2: 2 人, $F_1 = U[0, 1]$, $F_2 = U[0, 2]$

- 2 人の実質評価値は

- $\varphi_1(v) = v - \frac{1-F_1(v)}{f_1(v)} = v - \frac{1-v}{1} = 2v - 1 \quad (v \in [0, 1])$
- $\varphi_2(v) = v - \frac{1-F_2(v)}{f_2(v)} = v - \frac{1-v/2}{1/2} = 2v - 2 \quad (v \in [0, 2])$

- 実質社会的余剰 $\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim F} [\sum_{i \in N} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})]$ 最大の割当は

- $v_1 > \max(v_2 - 1/2, 1/2)$ ならば入札者 1 に割当
- $v_2 > \max(v_1 + 1/2, 1)$ ならば入札者 2 に割当

- このメカニズムは $(v_1, v_2) = (0.6, 1)$ の場合, 入札者 1 に割当

→ 入札額が最大の入札者に割り当てる訳ではない

- 実質評価値 $\varphi(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$ が単調でない場合 (irregular)
実質評価値が非負で最大の入札者に割り当てるルールは単調でない
- 収益を変えずに単調性を満たすように ironing した関数 $\bar{\varphi}$ を作る
 $\Phi(q) := \int_0^q \varphi(F^{-1}(r)) dr$, $\bar{\Phi}(q) = \text{conv } \Phi(q)$, $\bar{\varphi}(F^{-1}(q)) = \frac{d}{dq} \bar{\Phi}(q)$
- $\bar{\varphi}_i(v_i)$ が非負で最大の入札者 i に割り当てるルールは
耐戦略的で収入を最大にするオークションメカニズム！

まとめ

収入最大オークション

1. 各買い手 i は入札額 b_i を売り手に送る
2. (ironing された) 実質評価値 $\bar{\varphi}_i(b_i)$ が非負の入札者がいれば、それが最大の入札者 i^* に財を割当
3. i^* は (存在するなら) 財が割り当てられるために必要な最小入札額 $\inf\{t \mid \bar{\varphi}_{i^*}(t) \geq \max\{0, \max_{j \neq i^*} \bar{\varphi}_j(b_j)\}\}$ を支払う

性質

- 耐戦略的なメカニズムである (正直申告が支配戦略均衡)
- 評価値最大の入札者に売るとは限らない
- 決定的なメカニズムである (乱数を使わない)

複数財の場合は乱数を使わなくては収入が最大とならない

アウトライン

- 1 Bayes 的環境
- 2 収入最大オークション
- 3 近似最適収入オークション
- 4 演習

収入最大オークションは実行が困難

評価値の分布がわかっているならば収入最大オークションは設計できるが、
分布がわかるとは限らない

→ シンプルで収入が最適に近いオークションメカニズムがあると嬉しい

入札者の評価値が regular な独立同一分布に従う場合、
2 位価格オークションが収入の $\frac{n-1}{n}$ 近似であることを示す

Bulow-Klemperer の定理

定理

各入札者の評価値が regular な独立同一分布 F に従うと仮定する。
このとき、 $n + 1$ 人で 2 位価格オークションを行った際の期待収益は、
 n 人での収入最大オークションを行った際の期待収益以上

証明

- $n + 1$ 人での次の (BIC) オークションを考える
 - n 人に対し、収入最適オークションを行う
 - 財が余ったら、 $n + 1$ 人目に無料で割り当てる
- このオークションでの期待収入は、 n 人での最適期待収入に等しい
- このオークションは必ず誰かに財を割り当てるルールであるが、
2 位価格オークションは実質評価値最大の入札者に財を割り当てるので
より実質社会的余剰 (つまり期待収入) が大きい

人数による最適収入の変化

定理

各入札者の評価値が regular な独立同一分布 F に従うと仮定する.

n 人での収入最大オークションを行った際の期待収益を OPT_n と表すと

$$\frac{n-1}{n} \cdot \text{OPT}_n \leq \text{OPT}_{n-1} \leq \text{OPT}_n$$

証明

- $n - 1$ 人での次の (BIC) オークションを考える
 - ダミー入札者を 1 人加え, n 人での収入最適オークションを行う
 - ダミー入札者が落札した場合は収入 0 とみなす
- このオークションでの期待収入は, $\frac{n-1}{n} \cdot \text{OPT}_n (\leq \text{OPT}_{n-1})$
- n 人のオークションは, 1 人を無視することで $n - 1$ 人のオークションとすることもできるので, $\text{OPT}_{n-1} \leq \text{OPT}_n$

2 位価格オークションの近似比

各入札者の評価値が regular な独立同一分布 F に従うと仮定する。

定理 (proved)

$n + 1$ 人で 2 位価格オークションを行った際の期待収益は、
 n 人での収入最大オークションを行った際の期待収益以上

定理 (proved)

n 人での収入最大オークションを行った際の期待収益を OPT_n と表すと

$$\frac{n-1}{n} \cdot \text{OPT}_n \leq \text{OPT}_{n-1} \leq \text{OPT}_n$$

定理

入札者が n 人の時、2 位価格オークションの期待収益は、
収入最大オークションの期待収益の $\frac{n-1}{n}$ 倍以上

アウトライン

- 1 Bayes 的環境
- 2 収入最大オークション
- 3 近似最適収入オークション
- 4 演習

独立同一分布 $U[0, 1]$ に従う評価値をもつ n 人の入札者に対し，単一財の 1 位価格オークションを行う．このとき，対称な Bayes–Nash 均衡を 1 つ求めよ．また，その均衡での期待収入を求めよ．