

数理情報工学特論第一 第6回

河瀬 康志

2022 年 11 月 11 日

last update: 10:42pm, November 11, 2022

スケジュール

1. ゲーム理論の基礎 (10/7)
2. マッチング 1 (10/14)
3. マッチング 2 (10/21)
4. 公平割当 1 (10/28)
5. 公平割当 2 (11/4)
6. オークション 1 (11/11)
7. オークション 2 (11/25)

これまでとこれからのトピック

これまでのトピック: お金をつかわないメカニズム

- 安定マッチング
- 住宅割当問題
- 住宅市場問題
- 公平割当問題

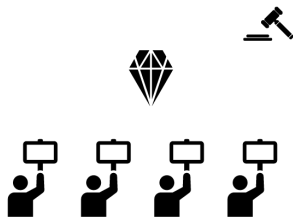
ここからのトピック: お金を使うメカニズム

- 単一財オークション
- 組合せオークション

オークションの例

- 美術品オークション (Christie's, Sotherby's)
- 生鮮食品の卸売市場でのせり (豊洲市場)
- 広告オークション (Google, Microsoft, Yahoo)
- インターネットオークション (ヤフオク!, eBay)
- 差押物件の公売
- 電波オークション
- 帝位オークション (西暦 193 年ローマ帝国の座を Didius Julianus が落札. しかし約 2 ヶ月後暗殺される)

望ましいオークション



理想的なオークション

- 耐戦略的 (正直申告が支配戦略)
- 参加することで損をしない 参加者から強制的に 100 万円を徴収のようなことはダメ
- 結果の計算を効率的に (多項式時間で) できる
- 社会的余剰が最大 **今回**
- 売り手の収入が最大 **次回**

アウトライン

- ① 単一財オークション
- ② 組合せオークション
- ③ 演習

単一財に対する代表的なオークションプロトコル

- 英国型 (English Auctions)
 - 公開価格で、入札者は価格を釣り上げていく
 - 最高値をつけた入札者が商品を競り落とす
- オランダ型 (Dutch Auctions)
 - 公開価格で、提示価格が少しずつ下がっていく
 - 最初に入札した (ストップと言った) 人が落札する
- 1 位価格封印入札
 - 各入札者は他者の付け値を知らずに入札
 - 最高値をつけた入札者が、自分の付け値で落札する
- 2 位価格封印入札 (Vickrey オークション)
 - 各入札者は他者の付け値を知らずに入札
 - 最高値をつけた入札者が、2 番目に高い付け値で落札する

単一財オークションのモデル

$N = \{1, 2, \dots, n\}$: 入札者. 各 $i \in N$ について以下を仮定

- 財の評価額は v_i . 本人のみが知っている
- p_i 支払うことで財を落札したときの効用は $v_i - p_i$ (準線形効用)
- 落札できなかった時の効用は 0

オークションメカニズム

- 各入札者 i は入札額 b_i を売り手に送る
- 売り手は入札額ベクトル $(b_1, \dots, b_n)$ に従って帰結を定める:
 - 財を割り当てる入札者 $i^* \in N \cup \{\emptyset\}$
 - 割り当てられた入札者 i^* が支払う金額 p

1 位価格封印入札の耐戦略性

- 1 位価格封印入札では嘘をつくことで得できるかも
- 支配戦略は存在しない



1 位価格封印入札の耐戦略性

- 1 位価格封印入札では嘘をつくことで得できるかも
- 支配戦略は存在しない



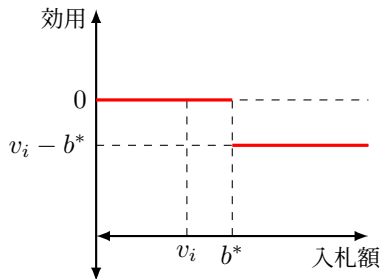
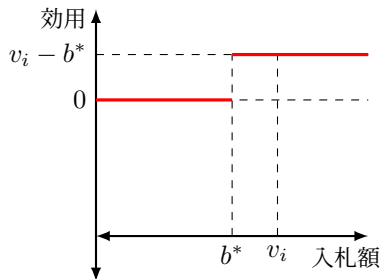
2 位価格封印入札の耐戦略性

定理

2 位価格封印入札では、入札額として評価額 v_i を提示することが支配戦略

証明: 入札者 i が v_i 以外の入札額を提示しても得しないことを示す

$b^* := \max_{j \neq i} b_j$ とすると、 v_i と b^* の大小関係によらず成立が確認できる



その他の2位価格封印入札の性質

- 2位価格封印入札は社会的余剰を最大化
 - 落札者 i^* : $v_{i^*} - p$
 - 落札者以外の入札者: 0
 - 売り手: p (売り手は財の価値を0と評価していると仮定)
- 全参加者の効用の合計 (社会的余剰) は v_{i^*}
- 売り手が信用されている必要がある
 - 100万円を入札して落札成功
 - 2位価格は99万9999円だと主催者から伝えられたら！？

公開オークションに対する戦略

英国型 (吊り上げ式)

- 評価額未満ならば価格を少しだけ吊り上げることが支配戦略
- 2 位価格封印入札とほぼ同じ結果となる
- 主催者側は 2 位価格封印入札より嘘をつきにくい

オランダ型 (吊り下げ式)

- ストップというまで有用な情報は得られない
- 1 位価格封印入札と同じ結果となる

談合の影響

2 位価格封印入札

- 評価値最大の入札者 i^* は真の評価値 v_{i^*} を、その他の入札者は 0 を申告
→ i^* は落札価格を 0 にできるので得をできる
- 各落札者は談合破りをしても得をできず、談合しやすい

1 位価格封印入札

- 入札者 i^* に安い価格で落札させる
→ 安すぎると i^* 以外が談合破りをして得してしまうかも
→ 談合破り対策にお金を渡すことも難しい
- 談合破りしやすいので、談合しにくい



\$20 で評価



\$10 で評価

アウトライン

- ① 単一財オークション
- ② 組合せオークション
- ③ 演習

組合せオークションの例

  を誰に割り当てる？ いくら支払ってもらう？

	$\emptyset$			 
	0	100	100	300
	0	50	200	250
	0	150	50	150

現実での応用

- 無線周波数帯の使用権 隣接する地域でも利用したい
- 空港での離発着権 離陸地と着陸地の両方の権利が必要
- トラック配送の請負 帰りにも配送できると効率的

組合せオークションのモデル

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$: 入札者
- $\mathcal{A}$: 可能な割当の集合
- V_i : 入札者 i がとりうる評価関数の集合 (その中のどれなのかは本人のみが知っている)
- $v_i(A)$: 評価関数 $v_i \in V_i$ をもつ $i \in N$ の割当 $A \in \mathcal{A}$ に対する嬉しさ
 - 何も得られなかった場合は 0
 - $v_i(A) \geq 0$
 - 効用は準線形であることを仮定

オークションメカニズム

オークションメカニズム

- 各入札者 i は評価関数 $v_i \in V_i$ を売り手に送る
- 売り手は入札ベクトル $(v_1, \dots, v_n)$ に従って帰結を定める：
 - 割当 $\varphi(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{A}$
 - i の支払額 $p_i(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}$

耐戦略性 正直申告が支配戦略

任意の $(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$, $i \in N$, $v'_i \in V_i$ について

$$v_i(\varphi(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(\varphi(v'_i, v_{-i})) - p_i(v'_i, v_{-i})$$

正直に申告したときの効用 v'_i だと嘘をついたときの効用

個人合理性 参加することで損をしない

任意の $(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$, $i \in N$ について

$$v_i(\varphi(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq 0$$

正直に申告したときの効用

Vickrey-Clarke-Groves (VCG) メカニズム

2 位価格封印入札の一般化

- $\varphi(v_1, \dots, v_n) \in \arg \max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{i \in N} v_i(A)$

社会的余剰最大の割当を選択

- $p_i(v_1, \dots, v_n) = \left(\max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{j \neq i} v_j(A) \right) - \sum_{j \neq i} v_j(\varphi(v_1, \dots, v_n))$

自分の存在によって生じる他の参加者の社会的余剰の減少分だけ支払う

例

	$\emptyset$			
	0	100	100	300
	0	50	200	250
	0	150	50	150

- : $p = 350 - 350 = 0$

- :  $p = 300 - 150 = 150$

- :  $p = 300 - 200 = 100$

VCG メカニズムの個人合理性

定理

VCG メカニズムは個人合理的

証明

- 各 $(v_1, \dots, v_n), i$ について、以下の成立を示せばよい：

$$v_i(\varphi(v_1, \dots, v_n)) - \left(\max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{j \neq i} v_j(A) \right) + \sum_{j \neq i} v_j(\varphi(v_1, \dots, v_n)) \geq 0$$

- 変形すると

$$\max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{j \in N} v_j(A) = \sum_{j \in N} v_j(\varphi(v_1, \dots, v_n)) \geq \max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{j \neq i} v_j(A)$$

- この不等式は、 i が参加することで社会的余剰は減らないので成立

∵ 何も得られなかった場合は評価値 0

VCG メカニズムの耐戦略性

定理

VCG メカニズムは耐戦略的

証明

- 入札者 i の真の評価関数を v_i ，その他の入札を v_{-i} とする
- 入札者 i が v'_i を申告した際に得る効用 $v_i(\varphi(v'_i, v_{-i})) - p_i(v'_i, v_{-i})$ は

$$\underbrace{v_i(\varphi(v'_i, v_{-i})) + \sum_{j \neq i} v_j(\varphi(v'_i, v_{-i}))}_{\text{割当 } \varphi(v'_i, v_{-i}) \text{ の真の意味での社会的余剰}} - \underbrace{\left(\max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{j \neq i} v_j(A) \right)}_{\text{定数}}$$

- 前半部分は $v'_i = v_i$ のときに最大となる → 正直申告が支配戦略

$\varphi(v_i, v_{-i}) \in \arg \max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{j \in N} v_j(A)$ なので

VCG メカニズムの問題点

- v_i を申告することは大変
 - m 個の財からなるオークションでは 2^m 次元
 -  の各部分集合の嬉しさを提出できる？
- $\varphi(v_1, \dots, v_n) \in \arg \max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{i \in N} v_i(A)$ の計算は大変
 - v_i は小さい表現をもつかもしれない
(例えば, 特定の組合せ S を含むバンドルを受け取れば嬉しさ $v_i(S)$, そうでなければ 0)
 - そのような場合も一般には社会的余剰最大化は NP-hard
- 参加者がルールを理解するのが困難 (二位価格封印入札でも大変)

VCG メカニズムの問題点: 架空名義入札

VCG メカニズムは架空名義入札を行うことでズルができてしまう

			 
	0	0	3
	2	2	4

• : $p = 0$

• :   $p = 3$

			 
	0	0	3
	2	2	4
	0	3	3

• : $p = 0$

• :  $p = 0$

• :  $p = 2$

は架空のを用意することで支払額を減らしている

アウトライン

- ① 単一財オークション
- ② 組合せオークション
- ③ 演習

財として同じものが k 個ある状況で，財に対して正の評価値をもつ n ($> k$) 人の入札者に対してオークションを行うことを考える．このとき，耐戦略的であり社会的余剰を最大にするような割当となるオークションメカニズムを設計せよ．ただし，各入札者には高々 1 つの財しか割り当ててはいけないものとする．