数理情報工学特論第一 第 5 回

河瀬 康志

2022 年 11 月 4 日

last update: 8:32pm, November 4, 2022

スケジュール

1. ゲーム理論の基礎 (10/7)
2. マッチング 1 (10/14)
3. マッチング 2 (10/21)
4. 公平割当 1 (10/28)
5. 公平割当 2 (11/4)
6. オークション 1 (11/11)
7. オークション 2 (11/~~18~~ 25)

駒場祭

アウトライン

資源配分

家，パソコン，車，絵画，本，服，施設の予約枠，...

- 限られた資源を何人かで分けたい

- どのように分けるのがよいか？

例

をで分けたい

	∅			
	0	200	150	350
	0	80	100	180

どの割当が「よい」？ どうやって見つける？

: 200
: 100

: 150
: 80

: 350
: 0

: 0
: 180

: 200
: 0

: 0
: 80

: 150
: 0

: 0
: 100

: 0
: 0

「よい」分け方とは

みんなが納得できて実行可能な配分ルールを設計したい

公平性	えこひいきをしない 誰かが独占するようなものは許さない
効率性	無駄のない割当ができる 全部捨てるのは公平だがダメ
計算可能性	多項式時間で計算できる 結果の計算に時間がかかると困る
耐戦略性	嘘をつくインセンティブがない 選好を正しく集められる 正直に表明することが支配戦略均衡となること

モデル

入力

- エージェント集合 $N = \{1, \ldots, n\}$
- 不可分財の集合 E
- 各 $i \in N$ の効用関数 $u_i : 2^E \to \mathbb{R}_+$
  - 正規化済: $u_i(\emptyset) = 0$
  - 単調: $u_i(X) \leq u_i(Y)$ if $X \subseteq Y \subseteq E$

出力

- 割当 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
  - $X_i \subseteq E$ for all $i \in N$
  - $X_i \cap X_j = \emptyset$ for all distinct $i, j \in N$

重要な効用関数のクラス

- 加法的：$\forall X, Y \subseteq E$ with $X \cap Y = \emptyset$: $u_i(X \cup Y) = u_i(X) + u_i(Y)$
    - $u_i(X) = \sum_{e \in X} u_i(\{e\})$ と書けることと同値
    - 各財の価値が独立であるということ
- 劣モジュラ：$\forall X, Y \subseteq E$: $u_i(X \cup Y) + u_i(X \cap Y) \leq u_i(X) + u_i(Y)$
    - $\forall X \subseteq \forall Y \subseteq E$ and $e \in E \setminus Y$:
      $u_i(X \cup \{e\}) - u_i(X) \geq u_i(Y \cup \{e\}) - u_i(Y)$ と同値
    - 限界効用逓減性を表す
- 劣加法的：$\forall X, Y \subseteq E$ with $X \cap Y = \emptyset$: $u_i(X \cup Y) \leq u_i(X) + u_i(Y)$
    - 組み合わせることによる嬉しさはない
      （ケーキとコーヒー，ゲーム機とソフト）

劣加法的 $\supsetneq$ 劣モジュラ $\supsetneq$ 加法的
以後基本的には加法的な場合を扱う

効率性の典型的な指標

功利主義的社会最適

効用の和が最大の割当：$\arg\max_{\mathbf{X}} \sum_{i \in N} u_i(X_i)$

Bentham「最大多数の最大幸福」の価値観

Pareto 効率性

誰かの効用を犠牲にしなければ他の誰も効用を高められない割当

Completeness (完備性)

すべての財を割り当てる：$\bigcup_{i \in N} X_i = E$

例: をに割当

	$\emptyset$			
	0	200	150	350
	0	80	100	180

公平性の典型的な指標

無羨望性 (EF) [Foley 1967; Varian 1974]

誰も羨望（envy）をもたない割当：$u_i(X_i) \geq u_i(X_j)\ (\forall i, j \in N)$

Envy-freeness up to one good (EF1) [Budish 2011]

羨望は高々財 1 個分：$u_i(X_i) \geq u_i(X_j \setminus \{e\})\ (\forall i, j \in N,\ \exists e \in X_j \text{ or } X_j = \emptyset)$

Envy-freeness up to the least valued good (EFX) [Caragiannis et al. 2016]

羨望は高々財 1 個分：$u_i(X_i) \geq u_i(X_j \setminus \{e\})\ (\forall i, j \in N,\ \forall e \in X_j)$

例: をに割当

	$\emptyset$			
	0	300	150	450
	0	200	100	300

アウトライン

アウトライン

Round Robin メカニズム リボンの輪 (ruban rond) に由来. cf. 傘連判状

- エージェントの順序 σ を決める
- ラウンド $k \pmod{n}$ では σ_k が余っている中で最も好ましい財を選択

例：$\sigma = (1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

Round Robin メカニズム リボンの輪 (ruban rond) に由来. cf. 傘連判状

- エージェントの順序 σ を決める
- ラウンド $k \pmod n$ では σ_k が余っている中で最も好ましい財を選択

例：$\sigma = (1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

Round Robin メカニズム リボンの輪 (ruban rond) に由来. cf. 傘連判状

- エージェントの順序 σ を決める
- ラウンド $k \pmod{n}$ では σ_k が余っている中で最も好ましい財を選択

例：$\sigma = (1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

Round Robin メカニズム リボンの輪 (ruban rond) に由来. cf. 傘連判状

- エージェントの順序 σ を決める
- ラウンド $k \pmod n$ では σ_k が余っている中で最も好ましい財を選択

例：$\sigma = (1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

Round Robin メカニズム リボンの輪 (ruban rond) に由来. cf. 傘連判状

- エージェントの順序 σ を決める
- ラウンド $k \pmod{n}$ では σ_k が余っている中で最も好ましい財を選択

例：$\sigma = (1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

Round Robin メカニズム リボンの輪 (ruban rond) に由来. cf. 傘連判状

- エージェントの順序 σ を決める
- ラウンド $k \pmod{n}$ では σ_k が余っている中で最も好ましい財を選択

例：$\sigma = (1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

Round Robin メカニズム リボンの輪 (ruban rond) に由来. cf. 傘連判状

- エージェントの順序 σ を決める
- ラウンド $k \pmod n$ では σ_k が余っている中で最も好ましい財を選択

例：$\sigma = (1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

Round Robin メカニズム リボンの輪 (ruban rond) に由来. cf. 傘連判状

- エージェントの順序 σ を決める
- ラウンド $k \pmod{n}$ では σ_k が余っている中で最も好ましい財を選択

例：$\sigma = (1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

- この割当は EF1 を満たす ⟶ 実は常に EF1 割当を出力する (次スライド)
- Pareto 効率的ではない $((e_4\, e_5 | e_2\, e_3\, e_6 | e_1)$ が Pareto 支配)

Round Robin の公平性

定理

（効用関数が加法的なとき）Round Robin メカニズムの出力 $\mathbf{X}$ は EF1 を満たす

- $i < j$ とし，σ_i, σ_j の間の羨望を解析する
- σ_i, σ_j が k 個目に受け取る財を $e_{i,k}$, $e_{j,k}$ とする
- σ_i が受け取る財の個数を r とする

σ_i	σ_j
$e_{i,1}$	$e_{j,1}$
$e_{i,2}$	$e_{j,2}$
$e_{i,3}$	$e_{j,3}$
$\vdots$	$\vdots$
$e_{i,r-1}$	$e_{j,r-1}$
$e_{i,r}$	$e_{j,r}$

存在しないかも

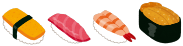
- $u_{\sigma_i}(e_{i,k}) \geq u_{\sigma_i}(e_{j,k})$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ より
  $u_{\sigma_i}(X_i) \geq u_{\sigma_i}(X_j)$ 　σ_i は σ_j に対して羨望をもたない
- $u_{\sigma_j}(e_{j,k}) \geq u_{\sigma_j}(e_{i,k+1})$ $(k = 1, 2, \ldots, r-1)$ より
  $u_{\sigma_j}(X_j) \geq u_{\sigma_j}(X_i \setminus \{e_{i,1}\})$

→ $\mathbf{X}$ は EF1

アウトライン

Envy-cycles メカニズム

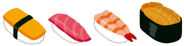
- 各財を順に誰にも妬まれていないエージェントに割当
- もしも妬みでサイクルができたら，それぞれの持分を交換

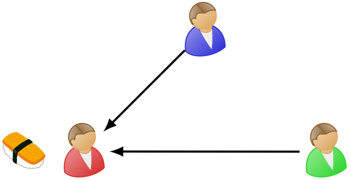
例: を割当 出力は EF1（次のスライド）だが Pareto 効率的ではない

				
	3	4	2	6
	2	3	4	1
	8	9	5	7

Envy-cycles メカニズム

- 各財を順に誰にも妬まれていないエージェントに割当
- もしも妬みでサイクルができたら，それぞれの持分を交換

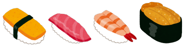
例: を割当 出力は EF1（次のスライド）だが Pareto 効率的ではない

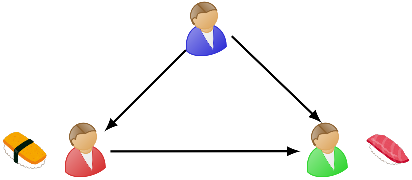


	3	4	2	6
	2	3	4	1
	8	9	5	7

Envy-cycles メカニズム

- 各財を順に誰にも妬まれていないエージェントに割当
- もしも妬みでサイクルができたら，それぞれの持分を交換

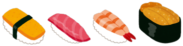
例: を割当 出力は EF1（次のスライド）だが Pareto 効率的ではない

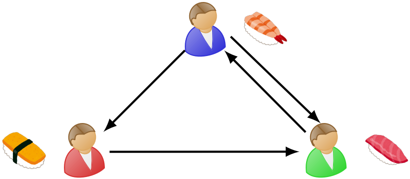


				
	3	4	2	6
	2	3	4	1
	8	9	5	7

Envy-cycles メカニズム

- 各財を順に誰にも妬まれていないエージェントに割当
- もしも妬みでサイクルができたら，それぞれの持分を交換

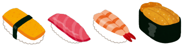
例: を割当 出力は EF1（次のスライド）だが Pareto 効率的ではない

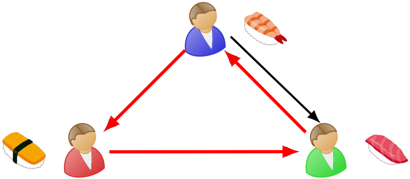


				
	3	4	2	6
	2	3	4	1
	8	9	5	7

Envy-cycles メカニズム

- 各財を順に誰にも妬まれていないエージェントに割当
- もしも妬みでサイクルができたら，それぞれの持分を交換

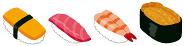
例: を割当 出力は EF1（次のスライド）だが Pareto 効率的ではない

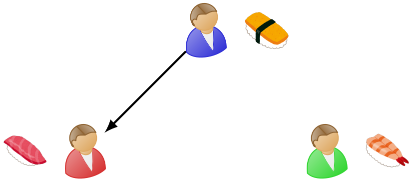


				
	3	4	2	6
	2	3	4	1
	8	9	5	7

Envy-cycles メカニズム

- 各財を順に誰にも妬まれていないエージェントに割当
- もしも妬みでサイクルができたら，それぞれの持分を交換

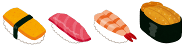
例: を割当 出力は EF1（次のスライド）だが Pareto 効率的ではない

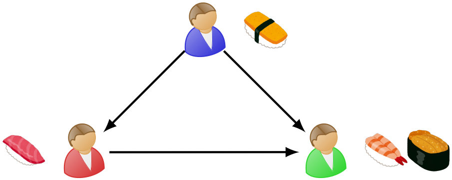


				
	3	4	2	6
	2	3	4	1
	8	9	5	7

Envy-cycles メカニズム

- 各財を順に誰にも妬まれていないエージェントに割当
- もしも妬みでサイクルができたら，それぞれの持分を交換

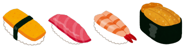
例: を割当 出力は EF1（次のスライド）だが Pareto 効率的ではない

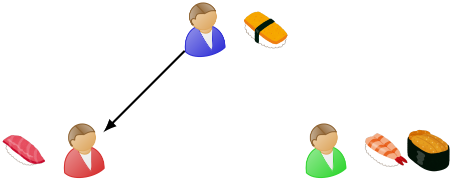


				
	3	4	2	6
	2	3	4	1
	8	9	5	7

Envy-cycles メカニズム

- 各財を順に誰にも妬まれていないエージェントに割当
- もしも妬みでサイクルができたら，それぞれの持分を交換

例: を割当 出力は EF1（次のスライド）だが Pareto 効率的ではない



				
	3	4	2	6
	2	3	4	1
	8	9	5	7

Envy-cycles メカニズムの公平性

定理

一般の効用関数でも，Envy-cycles メカニズムの出力 $\mathbf{X}$ は EF1 を満たす

証明

- 各ステップにおいて EF1 であることを帰納法で示す
- 割当前は EF1 (EF) であることは明らか
- あるステップにおいて EF1 であるとき
    - 誰にも妬まれていないエージェントに財を割り当てても EF1

      新しくできる妬みは高々新たに割り当てた財の 1 個分なので
    - 妬みサイクルで持分を交換しても EF1 は壊れない

      交換した人は持分がよくなり，他人の持分の良さは変わらないので

アウトライン

MNW 割当

- Nash Welfare: $\prod_{i \in N} u_i(X_i)$
- Maximum Nash Welfare (MNW) ⟶ Nash welfare 最大の割当

  ただし，任意の割当について $\prod_{i \in N} u_i(X_i) = 0$ の場合は，

  $u_i(X_i) > 0$ となるエージェント数が最大の中で $\prod_{i:\, u(X_i)>0} u_i(X_i)$ が最大となる割当

例　$\prod_{i \in N} u_i(X_i) = 8 \times 13 \times 10 = 1040$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	5	2	5	6	3	0
2	8	3	5	7	1	3
3	10	1	5	4	3	2

計算は NP-hard

MNW 割当の効率性・公平性

定理 [Caragiannis et al. 2016]

（効用関数が加法的なとき）MNW 割当 $\mathbf{X}$ は Pareto 効率的かつ EF1

- Pareto 効率的: Pareto 改善できると Nash welfare は増えるので矛盾
- EF1: 背理法で示す．$u_i(X_i) < u_i(X_j \setminus \{e\})$ $(\forall e \in X_j)$ と仮定
  - $e^* \in \arg\min_{e \in X_j,\, u_i(e)>0} u_j(e)/u_i(e)$ (妬みがあるのでこういう財は存在)

    (a) $u_i(X_i) < u_i(X_j) - u_i(e^*)$

    (b) $\frac{u_j(e^*)}{u_i(e^*)} \leq \frac{\sum_{e \in X_j,\, u_i(e)>0} u_j(e)}{\sum_{e \in X_j,\, u_i(e)>0} u_i(e)} \leq \frac{\sum_{e \in X_j} u_j(e)}{\sum_{e \in X_j} u_i(e)} = \frac{u_j(X_j)}{u_i(X_j)}$
  - e^* を j から i に渡した割当 $\mathbf{X}'$ では Nash welfare は増えて矛盾

$$\frac{\prod_k u_k(X'_k)}{\prod_k u_k(X_k)} = \frac{(u_i(X_i)+u_i(e^*))(u_j(X_j)-u_j(e^*))}{u_i(X_i)\cdot u_j(X_j)} = \left(1 + \frac{u_i(e^*)}{u_i(X_i)}\right)\cdot\left(1 - \frac{u_j(e^*)}{u_j(X_j)}\right)$$

(a) より成立 $$> \left(1 + \frac{u_i(e^*)}{u_i(X_j)-u_i(e^*)}\right)\cdot\left(1 - \frac{u_j(e^*)}{u_j(X_j)}\right) = \frac{1-u_j(e^*)/u_j(X_j)}{1-u_i(e^*)/u_i(X_j)}$$

(b) より成立 $$\geq 1$$

アウトライン

Adjusted winner メカニズム

$n = 2$ の場合のみ適用可能な方法

- エージェント 1 に全ての財を割当
- $u_1(e)/u_2(e)$ について降順に財を並べ替え
- 財を順にエージェント 2 に渡す
- エージェント 2 の羨望が財 1 個分以下になったら終了

  $u_2(X_2) \geq u_2(X_1 \setminus \{e\})$ $(\exists e \in X_1)$

例

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	20	30	25	10	5	10
2	10	20	20	15	10	30

Adjusted winner メカニズム

$n = 2$ の場合のみ適用可能な方法

- エージェント 1 に全ての財を割当
- $u_1(e)/u_2(e)$ について降順に財を並べ替え
- 財を順にエージェント 2 に渡す
- エージェント 2 の羨望が財 1 個分以下になったら終了

$u_2(X_2) \geq u_2(X_1 \setminus \{e\})\ (\exists e \in X_1)$

例

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	20	30	25	10	5	10
2	10	20	20	15	10	30

Adjusted winner メカニズム

$n = 2$ の場合のみ適用可能な方法

- エージェント 1 に全ての財を割当
- $u_1(e)/u_2(e)$ について降順に財を並べ替え
- 財を順にエージェント 2 に渡す
- エージェント 2 の羨望が財 1 個分以下になったら終了

  $u_2(X_2) \geq u_2(X_1 \setminus \{e\})$ $(\exists e \in X_1)$

例

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	20	30	25	10	5	10
2	10	20	20	15	10	30

Adjusted winner メカニズム

$n = 2$ の場合のみ適用可能な方法

- エージェント 1 に全ての財を割当
- $u_1(e)/u_2(e)$ について降順に財を並べ替え
- 財を順にエージェント 2 に渡す
- エージェント 2 の羨望が財 1 個分以下になったら終了

  $u_2(X_2) \geq u_2(X_1 \setminus \{e\})$ $(\exists e \in X_1)$

例

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	20	30	25	10	5	10
2	10	20	20	15	10	30

Adjusted winner メカニズムの効率性

定理

Adjusted winner メカニズムの出力は Pareto 効率的

$u_1(e) = 0,\ u_2(e) > 0$ となる財を全てエージェント 2 に渡した後は
常に Pareto 効率的な割当となっていることを示す

- 最後にエージェント 2 に渡した財を e^* とし，$\alpha := u_1(e^*)/u_2(e^*)$ とする
  - 各 $e \in X_1$ について $u_1(e)/u_2(e) \geq \alpha$
  - 各 $e \in X_2$ について $u_1(e)/u_2(e) \leq \alpha$

  ただし $\alpha > 0$
- 現在の割当は $u_1(X_1) + \alpha \cdot u_2(X_2)$ について最大の割当となっている

  各財をより効率的な方に割り当てているため
- Pareto 改善できたとすると $u_1(X_1) + \alpha \cdot u_2(X_2)$ が増えるので矛盾

Adjusted winner メカニズムの公平性

定理

（効用関数が加法的なとき）Adjusted winner メカニズムの出力 $\mathbf{X}$ は EF1

- $u_2(X_2) \geq u_2(X_1 \setminus \{e\})$ $(\exists e \in X_1)$ は成立
- 最後にエージェント 2 に渡した財を e^*，渡す直前の割当を $\mathbf{X}'$ とする
  $X'_1 = X_1 \cup \{e^*\}, X'_2 = X_2 \setminus \{e^*\}$
- メカニズムの動作より，$u_2(X'_2) < u_2(X'_1 \setminus \{e^*\}) = u_2(X_1)$
- $\mathbf{X}'$ は (X_2, X_1) に Pareto 支配されないので,$u_1(X'_1) \geq u_1(X_2)$
- よって，$u_1(X_1) = u_1(X'_1) - u_1(e^*) \geq u_1(X_2) - u_1(e^*) = u_1(X_2 \setminus \{e^*\})$

メカニズムまとめ

メカニズム	n	効用関数	効率性	公平性	計算量
Round robin	一般	加法的	complete	EF1	多項式時間
Envy-cycles	一般	一般	complete	EF1	多項式時間
MNW	一般	加法的	Pareto 効率的	EF1	NP-hard
Adjusted winner	2	加法的	Pareto 効率的	EF1	多項式時間

- どのメカニズムも耐戦略性は満たしていない
- $n = 2$，加法的でも Pareto 効率的 & EF1 & 耐戦略的なメカニズムは存在しない [Amanatidis et al. 2017]
- complete & EFX な割当が存在するかは未解決

  ($n = 3$, 加法的) や ($n = 2$, 一般) なら存在

アウトライン

演習

Round robin, Envy-cycles, MNW, Adjusted winner の 4 つのメカニズムについて，戦略的操作可能となる例を示せ．
(どんなタイブレークでもダメなことを示せ)