数理情報工学特論第一 第 3 回

河瀬 康志

2022 年 10 月 21 日

last update: 3:02pm, November 25, 2022

スケジュール

1. ゲーム理論の基礎 (10/7)
2. マッチング 1 (10/14)
3. マッチング 2 (10/21)
4. 公平割当 1 (10/28)
5. 公平割当 2 (11/4)
6. オークション 1 (11/11)
7. オークション 2 (11/18)

復習：マッチングのモデル

インスタンス: $I = (M, W, (\succ_m)_{m \in M}, (\succ_w)_{w \in W})$

- M: 男性集合
- W: 女性集合
- $\succ_m$: 男性 $m \in M$ の選好．$W \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序（$\varnothing$：誰ともマッチしない）
- $\succ_w$: 女性 $w \in W$ の選好．$M \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序

定義

- $E := \{(m, w) \in M \times W \mid m \succ_w \varnothing \text{ and } w \succ_m \varnothing\}$ 許容可能なペア
- どの主体も高々 1 人とマッチする $\mu \subseteq E$ をマッチングという
- マッチング μ に対し $w \succ_m \mu(m)$ かつ $m \succ_w \mu(w)$ なるペア $(m, w) \in M \times W$ をブロッキングペアという
- ブロッキングペアがないようなマッチングを安定マッチングという

アウトライン

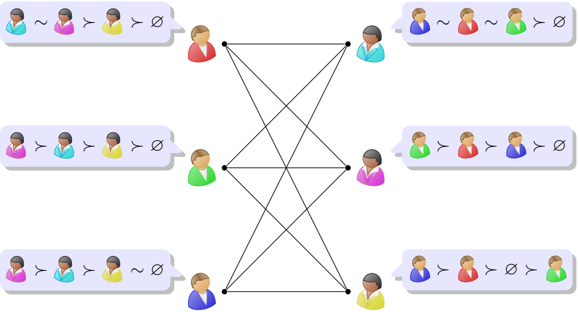
タイ有りの1対1安定マッチング問題

インスタンス: $I = (M, W, (\succsim_m)_{m \in M}, (\succsim_w)_{w \in W})$

- M: 男性集合
- W: 女性集合

同順位を許すランク付け

- $\succsim_m$: 男性 $m \in M$ の選好．$W \cup \{\varnothing\}$ 上の弱順序
- $\succsim_w$: 女性 $w \in W$ の選好．$M \cup \{\varnothing\}$ 上の弱順序



安定性の定義

マッチング μ の安定性を次のように定義

超安定

$w \succsim_m \mu(m)$ かつ $m \succsim_w \mu(w)$ なるペア $(m, w) \notin \mu$ が存在しない

互いに現状維持以上のペアがあるとダメ

強安定

$w \succsim_m \mu(m)$ かつ $m \succsim_w \mu(w)$ かつ「$w \succ_m \mu(m)$ または $m \succ_w \mu(w)$」なるペア (m, w) が存在しない

互いに現在以上の相手でどちらかが改善できるようなペアがあるとダメ

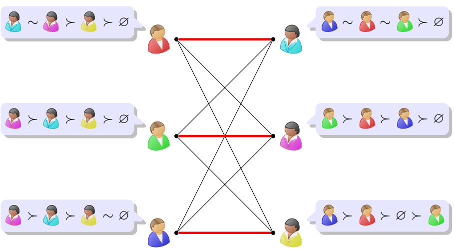
弱安定

$w \succ_m \mu(m)$ かつ $m \succ_w \mu(w)$ なるペア $(m, w) \notin \mu$ が存在しない

互いに現在よりよい相手となるペアがあるとダメ

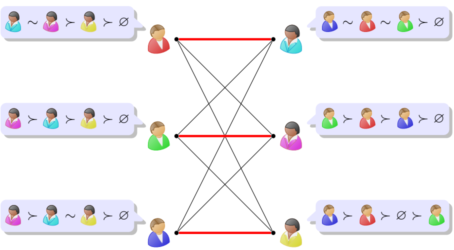
定義より: 超安定 $\Longrightarrow$ 強安定 $\Longrightarrow$ 弱安定

例



弱安定だが強安定・超安定でない

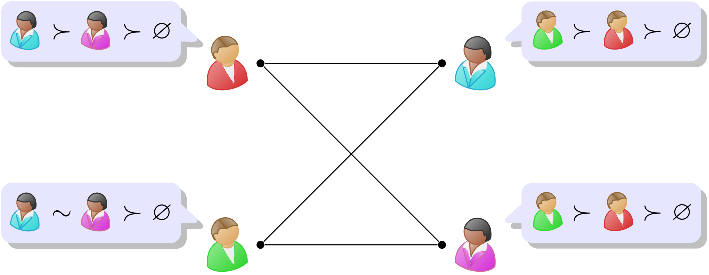
(,) がブロッキングペア

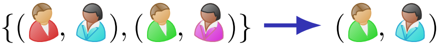
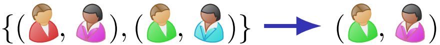


弱安定・強安定だが超安定でない

(,) がブロッキングペア

超安定・強安定マッチングは存在しないかも



- 完全マッチングでなければ強安定ではない
  （マッチしていない男女がブロッキングペア）
-  はブロッキングペア
-  はブロッキングペア

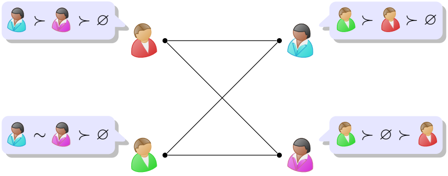
安定マッチングの計算

- 超安定・強安定マッチングの存在性判定は多項式時間で可能
- 存在する場合は発見することも多項式時間で可能

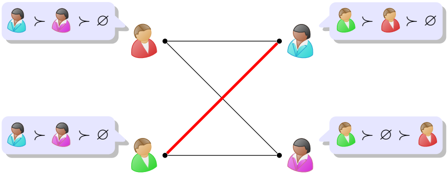
- 弱安定マッチングは常に存在する
- 多項式時間で発見することもできる
  - 選好に同順位があれば適当にタイブレーク
  - 受入保留方式を適用し安定マッチングを求める

  $\longrightarrow$ 得られるマッチングは，もとの選好で弱安定マッチング
- ただし，タイブレークによってマッチサイズは変わる

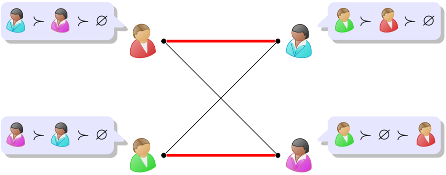
弱安定マッチングのサイズ



オリジナル



タイブレーク 1



タイブレーク 2

- サイズ最大の弱安定マッチングを見つけることは NP-hard
- 適当なタイブレークでサイズの 2 近似．1.5 近似アルゴリズムも存在

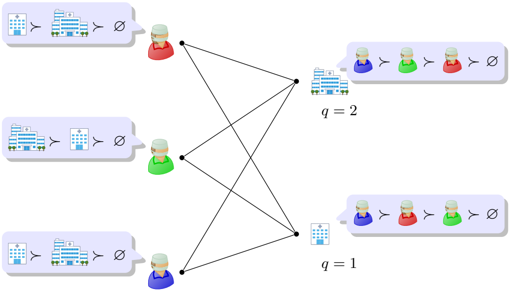
レポート課題

アウトライン

多対一安定マッチング問題

インスタンス: $I = (D, H, (\succ_d)_{d \in D}, (\succ_h)_{h \in H}, (q_h)_{h \in H})$

- D: 研修医集合
- H: 病院集合
- $\succ_d$: 研修医 $d \in D$ の選好．$H \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序
- $\succ_h$: 病院 $h \in H$ の選好．$D \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序
- q_h: 病院 $h \in H$ の定員



多対一安定マッチング問題

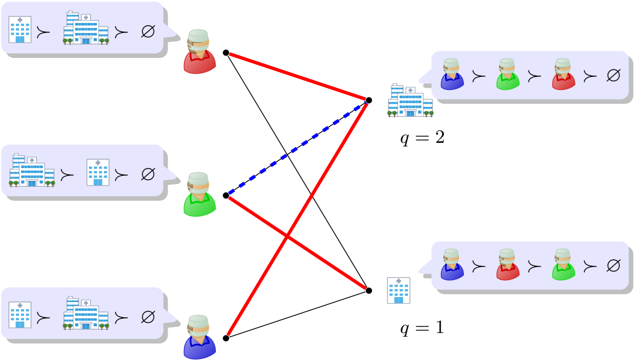
インスタンス: $I = (D, H, (\succ_d)_{d \in D}, (\succ_h)_{h \in H}, (q_h)_{h \in H})$

- D: 研修医集合
- H: 病院集合
- $\succ_d$: 研修医 $d \in D$ の選好．$H \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序
- $\succ_h$: 病院 $h \in H$ の選好．$D \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序
- q_h: 病院 $h \in H$ の定員

定義

- $E := \{(d, h) \in D \times H \mid d \succ_h \varnothing \text{ and } h \succ_d \varnothing\}$ 許容可能なペア
- $\mu \subseteq E$ がマッチングであるとは
  - $|\mu(d)| \leq 1 \ (\forall d \in D)$
  - $|\mu(h)| \leq q_h \ (\forall h \in H)$

ブロッキングペア



次のようなペア $(d, h) \in D \times H$ があると不安定（ブロッキングペア）

- d のマッチ相手よりも h の方が望ましい
- h の最低順位のマッチ相手または空き枠よりも d の方が望ましい

レスポンシブ選好

$D \cup \{\varnothing\}$ 上の選好から $\{X \subseteq D \mid |X| \leq q_h\}$ 上の選好は次のように解釈

定義：レスポンシブ選好

$X \subseteq D$ $(|X| < q_h)$ と $d, d' \in D \setminus X$ に対し，以下を満たす選好

- $X \cup \{d\} \succ_h X \cup \{d'\} \iff d \succ_h d'$
- $X \cup \{d\} \succ_h X \iff d \succ_h \varnothing$

ブロッキングペアがないことと次のブロッキング提携がないことは同値

定義：ブロッキング提携 $(X, h) \in 2^D \times H$

- $X \succ_h \mu(h)$
- $h \succeq_d \mu(d)$ for all $d \in X$

ペアに関する安定性だけ考えればグループに対する安定性も成立する

受入保留方式

受入保留方式を自然に拡張することで安定マッチングを発見可能

研修医側プロポーズ受入保留方式

- 各研修医は最良の病院にプロポーズ
- 各病院 h はプロポーズしてきた中でトップ q_h を残して断る

病院側プロポーズ受入保留方式

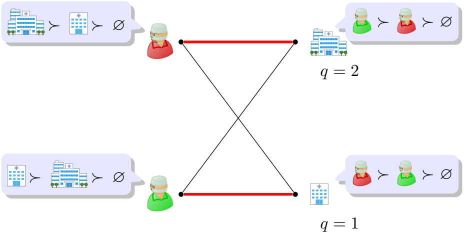
- 各病院 h はトップ q_h 人の研修医に告白
- 各研修医はプロポーズしてきた中で最良の病院以外を断る

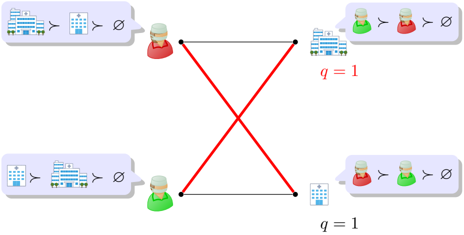
各病院 h を q_h 個のコピーで置き換え

安定性の証明は一対一インスタンスに変換することで可能
束構造となること，研修医・病院最適性も言える
耐戦略性は研修医側プロポーズについては言えるが，病院側についてはダメ

定員による戦略的操作

病院側プロポーズ受入保留方式は定員による戦略的操作可能





選好による戦略的操作可能性はレポート課題

田舎の病院定理

一匹狼定理よりも少し強い性質が成り立つ

定理

任意のふたつの安定マッチング μ, ν に対し

- $\forall d \in D$: $\mu(d) = \varnothing \iff \nu(d) = \varnothing$
- $\forall h \in H$: $|\mu(h)| = |\nu(h)|$
- $\forall h \in H$: $|\mu(h)| < q_h \implies \mu(h) = \nu(h)$

証明は一対一に帰着したあと対称差を取ってサイクルに分解すればよい

より一般のモデル

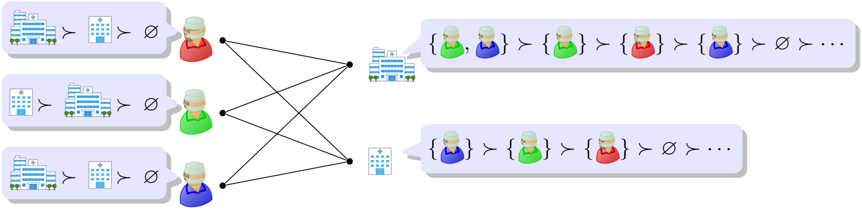
インスタンス: $I = (D, H, (\succ_d)_{d\in D}, (\succ_h)_{h\in H})$

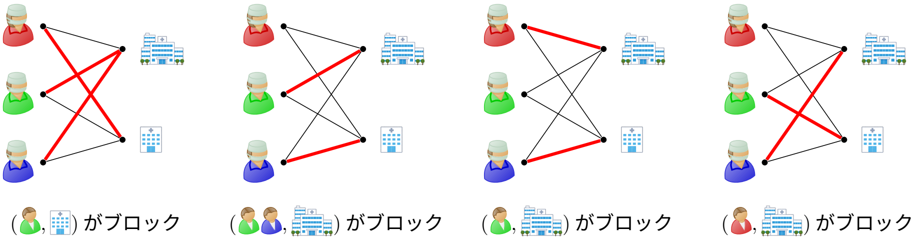
- D: 研修医集合
- H: 病院集合
- $\succ_d$: 研修医 $d \in D$ の選好．$H \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序
- $\succ_h$: 病院 $h \in H$ の選好．2^D 上の全順序

定義

- $\mu \subseteq D \times H$ がマッチングであるとは
  - $|\mu(d)| \leq 1$ and $\mu(d) \succ_d \varnothing$ $(\forall d \in D)$
  - $\mu(h) \succeq_h \emptyset$ $(\forall h \in H)$
- $(X, h) \in 2^D \times H$ がブロッキング提携であるとは
  - $X \succ_h \mu(h)$
  - $h \succeq_d \mu(d)$ for all $d \in X$
- ブロッキング提携の存在しないマッチングを安定マッチングという

安定マッチングは存在しないかも





安定マッチングが存在する十分条件

- 2^D 上の全順序 $\succ_h$ から選択関数 $C_h\colon 2^D \to 2^D$ を以下のように定義

$$C_h(X) := (X \text{ の部分集合の中で } \succ_h \text{ の意味で最良のもの}) \quad (\forall X \subseteq D)$$

- 全順序から作った選択関数の満たす性質
  - $C_h(Y) \subseteq X \subseteq Y \subseteq D \implies C_h(X) = C_h(Y)$ (一貫性)
- 選択関数に対する望ましい性質
  - $X \subseteq Y \subseteq D \implies X \setminus C_h(X) \subseteq Y \setminus C_h(Y)$ (代替性)
  - $X \subseteq Y \subseteq D \implies |C_h(X)| \leq |C_h(Y)|$ (サイズ単調性)

定理

- 全ての C_h が一貫性と代替性を満たす $\implies$ 安定マッチングが存在
- 全ての C_h が代替性とサイズ単調性を満たす
  $\implies$ 一般化受入保留方式が研修医側耐戦略性を満たす

前半は次の次のスライドで示す

選択関数の例

- $C(X) = \arg\max\{\sum_{d \in X'} v(d) \mid X' \subseteq X,\ |X'| \leq q\}$
  → 一貫性，代替性，サイズ単調性を満たす

- $C(X) = \arg\max\{\sum_{d \in X'} v(d) \mid X' \subseteq X,\ X' \in \mathcal{F}\}$
  → $(D, \mathcal{F})$ がマトロイドなら一貫性，代替性，サイズ単調性を満たす

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$, (ii) $X \subseteq Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F}$, (iii) $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| < |Y| \Rightarrow \exists d \in Y \setminus X$, $X \cup \{d\} \in \mathcal{F}$

- $C(X) = \arg\max\{\sum_{d \in X'} v(d) \mid X' \subseteq X,\ \sum_{d \in X'} s(d) \leq q\}$
  → 一貫性を満たす

argmax が複数存在する場合は辞書式最小のものを選択すると仮定

一般化受入保留方式 [Hatfield–Milgrom 2005]

1. 各研修医は，まだ断られていない中で最良の病院にプロポーズ
2. 各病院はプロポーズした研修医の最良部分集合を選択 (残りは断る)
3. ステップ 2 で誰かがリジェクトされればステップ 1 へ

$C_h(Y) \subseteq X \subseteq Y \subseteq D \implies C_h(X) = C_h(Y)$

$X \subseteq Y \subseteq D \implies X \setminus C_h(X) \subseteq Y \setminus C_h(Y)$

定理

全ての C_h が一貫性と代替性を満たすとき，
一般化受入保留方式の出力 μ は安定マッチング

証明

- 代替性と一貫性を満たす選択関数 $C \Rightarrow C(S \cup T) = C(C(S) \cup C(T))$

  代替性より $C(S \cup T) \subseteq C(S) \cup C(T) \subseteq S \cup T$，一貫性より $C(S \cup T) = C(C(S) \cup C(T))$

- $C_h(\{d \in D \mid h \succeq_d \mu(d)\}) =$
  $C_h(C_h(\cdots C_h(C_h(\boxed{\text{第 1 ラウンド}}) \cup \boxed{\text{第 2 ラウンド}}) \cdots) \cup \boxed{\text{第 } k \text{ ラウンド}}) = \mu(h)$
- $X \subseteq \{d \in D \mid h \succeq_d \mu(d)\}$ ならば，$\mu(h) \succeq_h X$ なのでブロックしない

アウトライン

演習

タイ有りの 1 対 1 安定マッチング問題のインスタンスにおいて，ある弱安定マッチングのマッチ数は，実行可能マッチングの中で最大のマッチ数の半分以上であることを示せ．

病院側がレスポンシブ選好である多対 1 安定マッチング問題において，病院側プロポーズ受入保留方式が選好について病院側が戦略的操作可能となる例を示せ．