数理情報工学特論第一 第 2 回

河瀬 康志

2022 年 10 月 14 日

last update: 2:56pm, October 14, 2022

スケジュール

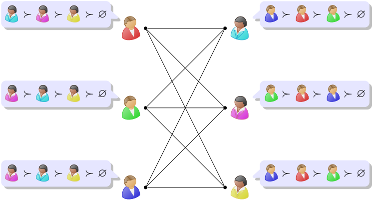
1. ゲーム理論の基礎 (10/7)
2. マッチング 1 (10/14)
3. マッチング 2 (10/21)
4. 公平割当 1 (10/28)
5. 公平割当 2 (11/4)
6. オークション 1 (11/11)
7. オークション 2 (11/18)

アウトライン

1. 参加者が選好をもつマッチング
2. 安定マッチング
3. 戦略的な問題
4. 演習

いろいろなマッチング

- 男性と女性
- 学生と公立学校
- 学生と研究室
- 児童と保育園
- 研修医と病院
- 難民と難民キャンプ



各参加者はマッチする相手に関する希望をもっている

どのようにマッチングを決めれば良い？

モデル

インスタンス: $I = (M, W, (\succ_m)_{m \in M}, (\succ_w)_{w \in W})$

- M: 男性集合
- W: 女性集合
- $\succ_m$: 男性 $m \in M$ の選好．$W \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序

誰ともマッチしない

- $\succ_w$: 女性 $w \in W$ の選好．$M \cup \{\varnothing\}$ 上の全順序

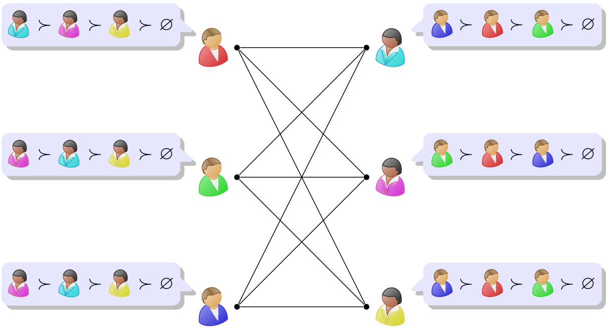
定義

- $E := \{(m, w) \in M \times W \mid m \succ_w \varnothing \text{ and } w \succ_m \varnothing\}$ 許容可能なペア
- $\mu \subseteq M \times W$ がマッチングであるとは
  - どの主体も高々一人とマッチ
  - $\mu \subseteq E$ (マッチ相手は許容可能)
- $i \in M \cup W$ のマッチング μ におけるマッチ相手を $\mu(i)$ と書く

ボストン方式

ボストンの公立学校への学生割当に使われていた方法．現在でもさまざまな場所で使われている

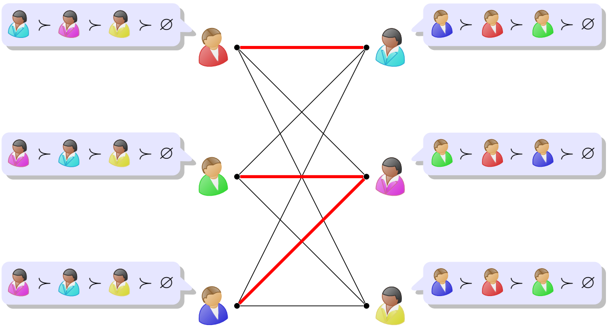
1. 各独身男性は，残っている中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性と結婚
3. 男女ともに独身のものが残っている場合は 1 に戻る



ボストン方式

ボストンの公立学校への学生割当に使われていた方法．現在でもさまざまな場所で使われている

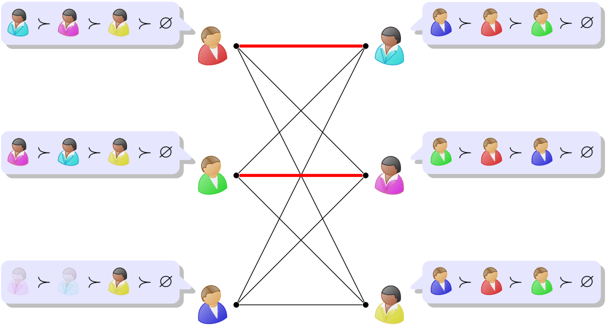
1. 各独身男性は，残っている中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性と結婚
3. 男女ともに独身のものが残っている場合は 1 に戻る



ボストン方式

ボストンの公立学校への学生割当に使われていた方法．現在でもさまざまな場所で使われている

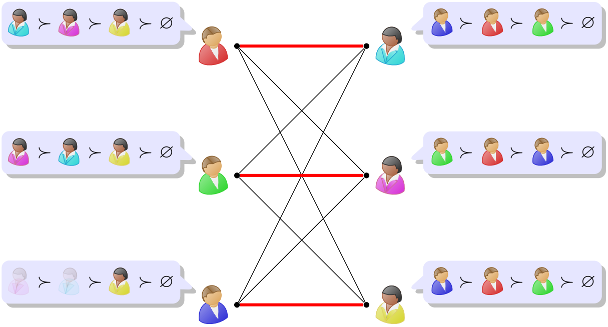
1. 各独身男性は，残っている中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性と結婚
3. 男女ともに独身のものが残っている場合は 1 に戻る



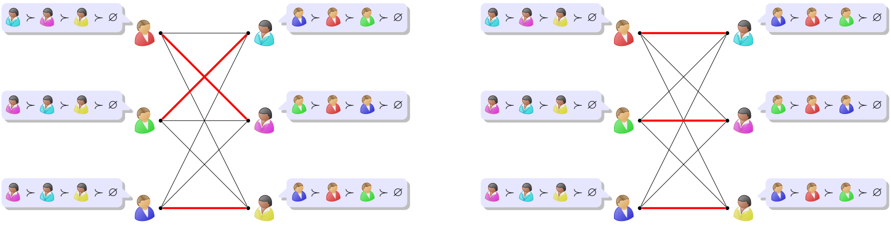
ボストン方式

ボストンの公立学校への学生割当に使われていた方法．現在でもさまざまな場所で使われている

1. 各独身男性は，残っている中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性と結婚
3. 男女ともに独身のものが残っている場合は 1 に戻る



マッチングの効率性

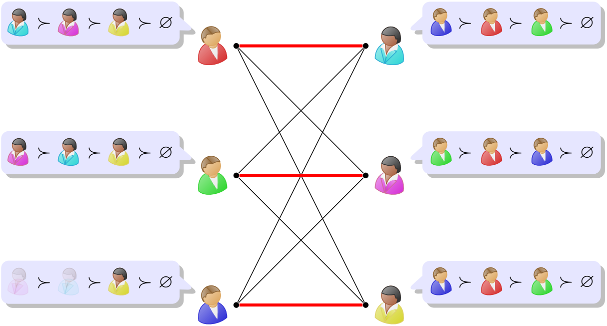


- 誰にとっても右のマッチングの方が望ましい（Pareto 支配）
- どのマッチングにも Pareto 支配されないマッチング
  ⟶ Pareto 効率的

ボストン方式の効率性

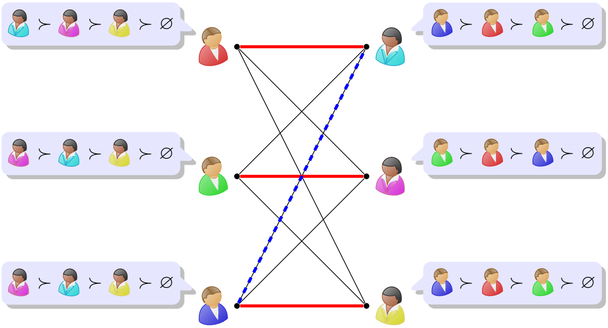
定理

ボストン方式は Pareto 効率的なマッチングを出力する



ボストン方式の結果を Pareto 支配するマッチングが存在したとすると矛盾

ボストン方式の不安定性



- とはお互いをボストン方式の相手より好む
- ボストン方式の結果を無視したくなってしまう ⟶ 不安定
- 不安定でない（安定な）マッチングを見つけたい

アウトライン

1 参加者が選好をもつマッチング

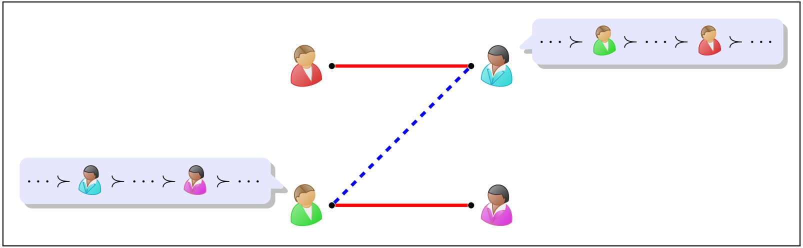
2 安定マッチング

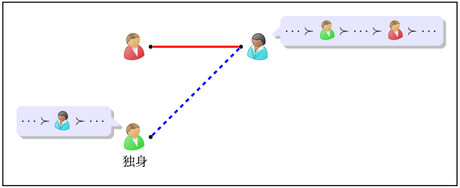
3 戦略的な問題

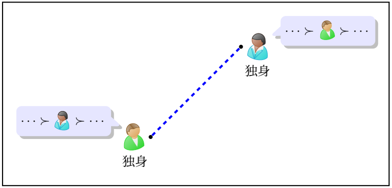
4 演習

ブロッキングペア

次のようなペアがあると不安定

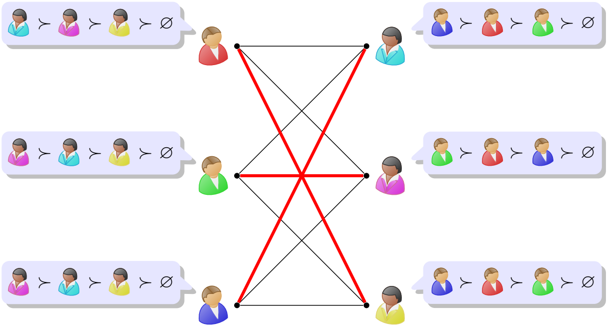






安定マッチング

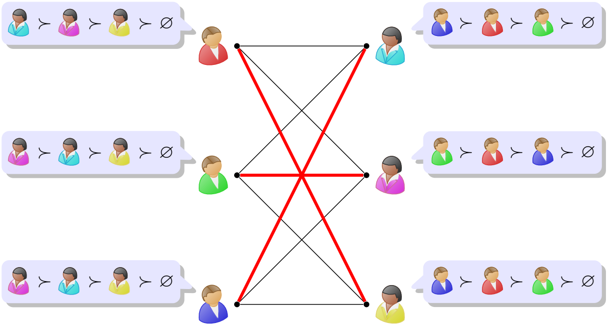
ブロッキングペアの存在しないマッチングを安定マッチングとよぶ



- 安定マッチングは常に存在する？
- 存在したとしても高速に見つけることはできる？

安定マッチング

ブロッキングペアの存在しないマッチングを安定マッチングとよぶ

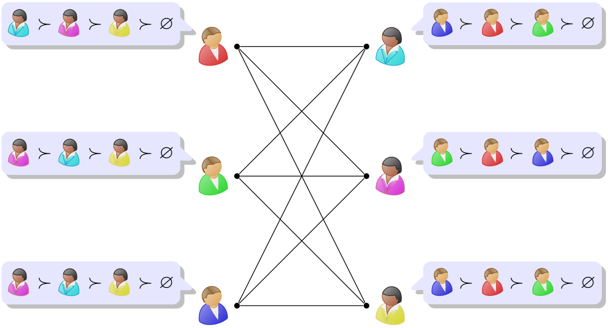


- 安定マッチングは常に存在する？
- 存在したとしても高速に見つけることはできる？

→ 受入保留方式によりできる！

受入保留方式 [Gale–Shapley 1962]

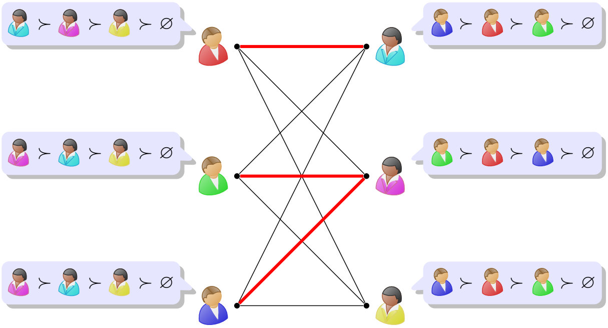
1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ



cf. `https://yambi.jp/stable_matching/`

受入保留方式 [Gale–Shapley 1962]

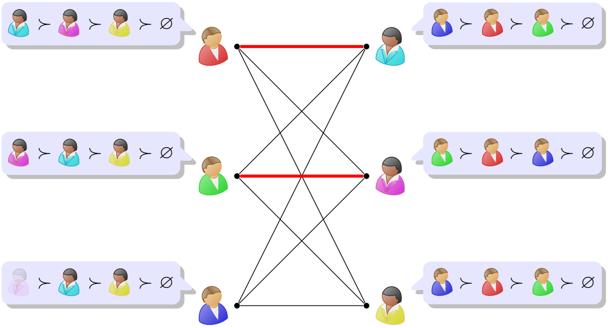
1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ



cf. `https://yambi.jp/stable_matching/`

受入保留方式 [Gale–Shapley 1962]

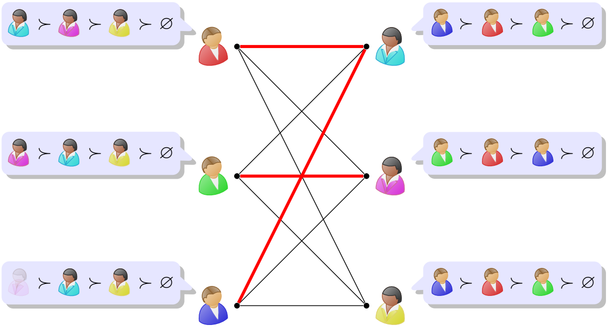
1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ



cf. `https://yambi.jp/stable_matching/`

受入保留方式 [Gale–Shapley 1962]

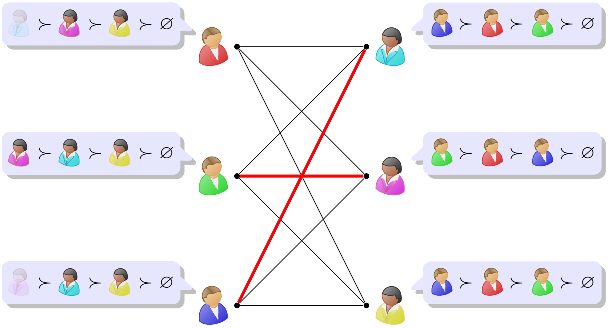
1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ



cf. `https://yambi.jp/stable_matching/`

受入保留方式 [Gale–Shapley 1962]

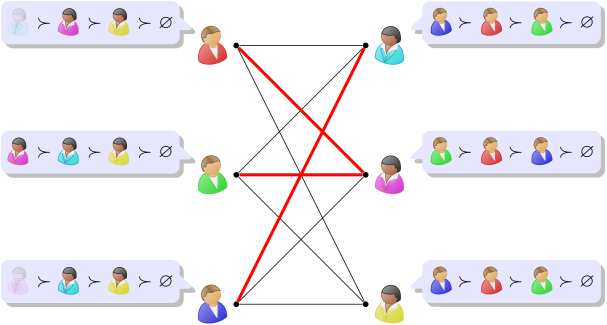
1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ



cf. `https://yambi.jp/stable_matching/`

受入保留方式 [Gale–Shapley 1962]

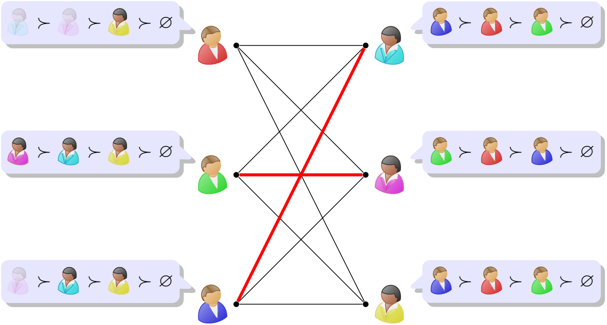
1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ



cf. `https://yambi.jp/stable_matching/`

受入保留方式 [Gale–Shapley 1962]

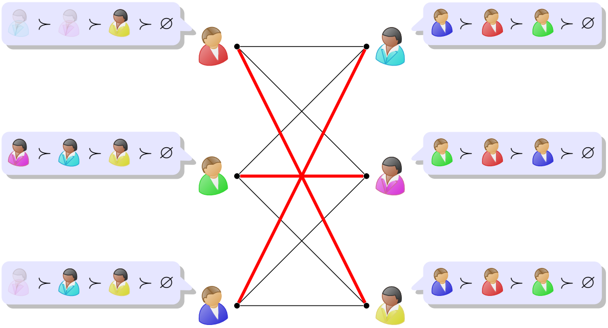
1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ



cf. `https://yambi.jp/stable_matching/`

受入保留方式 [Gale–Shapley 1962]

1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ



cf. https://yambi.jp/stable_matching/

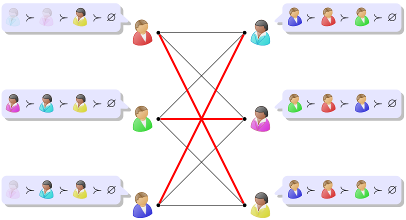
受入保留方式は安定マッチングを出力

定理

受入保留方式は必ず安定マッチングを出力する

証明

- ブロッキングペア (m, w) が存在したと仮定し背理法により証明
- 男性 m は女性 w に今のマッチ相手より先にプロポーズをしたはず
- 女性はより良い相手を選び続けるので矛盾



受入保留方式の応用

受入保留方式を少し変えたものは実際に使われている

- 研修医マッチング（アメリカ，イギリス，日本など）

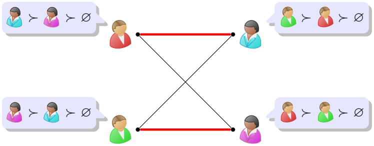
THE MATCH
NATIONAL RESIDENT MATCHING PROGRAM®

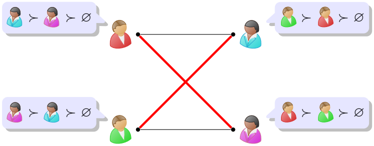
2005 年にボストン方式から受入保留方式へ変更

- 公立学校選択制度（ニューヨーク市，ボストン市など）
- 東京大学 進学選択の第二段階
  http://www.c.u-tokyo.ac.jp/zenki/news/kyoumu/firstyear/2016/1125173747.html
- 諸大学での研究室配属

安定マッチングは複数存在

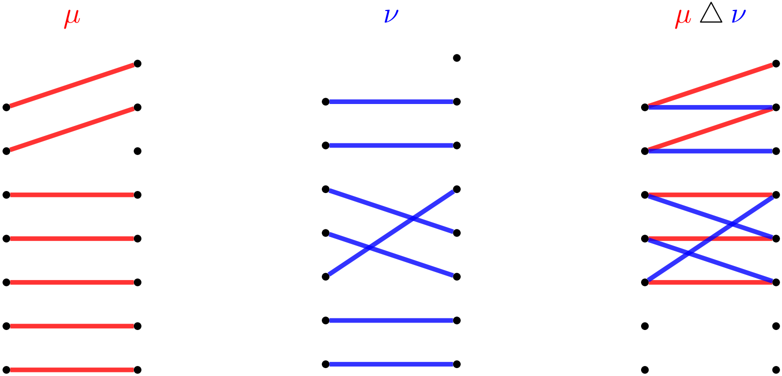
- 安定マッチングは複数あるかもしれない
- 何かよい構造はある？





マッチングの対称差

ふたつのマッチングの対称差をとると，各連結成分はパスかサイクル



安定マッチングの対称差

ふたつの安定マッチングの対称差をとると，各連結成分はサイクル

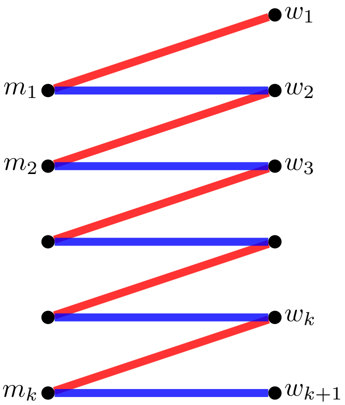
パスはあり得ない（パスがあったとすると安定性に矛盾）

- ν の安定性より $w_2 \succ_{m_1} w_1$
- μ の安定性より $m_2 \succ_{m_2} m_1$
- ν の安定性より $w_3 \succ_{m_2} w_2$

$\vdots$

- ν の安定性より $w_{k+1} \succ_{m_k} w_k$

→ (m_k, w_{k+1}) は μ のブロッキングペア

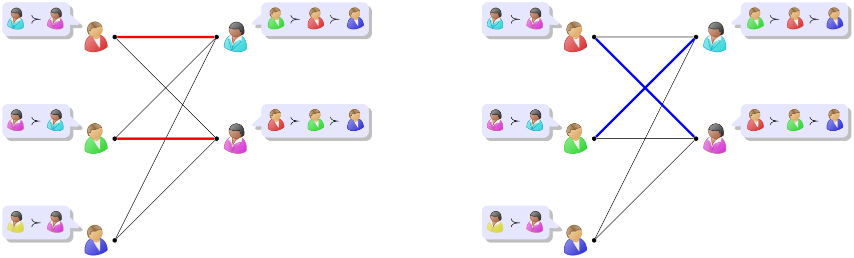


安定マッチング集合の構造 1

一匹狼定理

どの安定マッチングでもマッチする人は変わらない

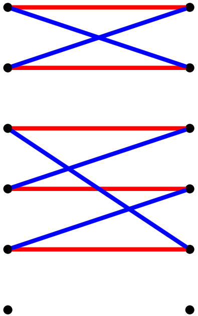
任意のふたつの安定マッチングの対称差はサイクルに分解されることより成立



安定マッチングに対する操作

安定マッチング μ, ν に対し，
$\mu \triangle \nu$ の各サイクルは以下のどちらか

- 全男性が μ より ν を好み
  全女性が ν より μ を好む
- 全男性が ν より μ を好む
  全女性が μ より ν を好み



以下の操作を定義

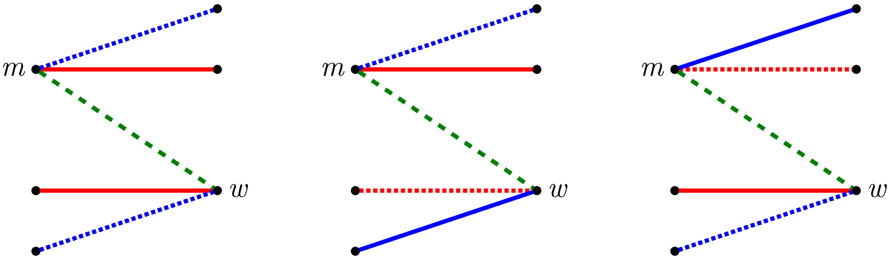
- $\mu \vee \nu$: 各男性が $\mu \cup \nu$ で良い方のパートナーを選んだマッチング
  各女性が $\mu \cup \nu$ で悪い方のパートナーを選んだマッチング
- $\mu \wedge \nu$: 各女性が $\mu \cup \nu$ で良い方のパートナーを選んだマッチング
  各男性が $\mu \cup \nu$ で悪い方のパートナーを選んだマッチング

安定マッチング集合の構造 2

定理

μ, ν を安定マッチングとするとき，$\mu \vee \nu$, $\mu \wedge \nu$ は安定マッチング

ブロッキングペア (m, w) があると μ, ν の安定性に矛盾

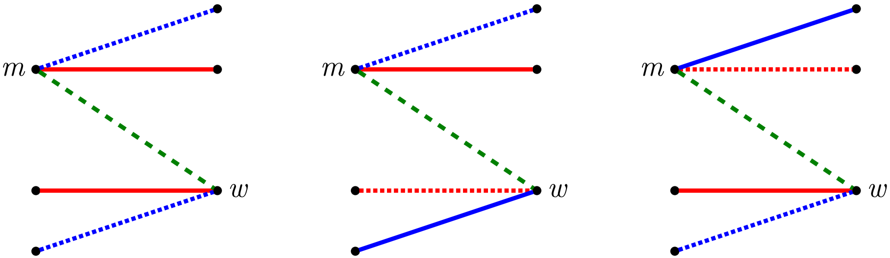


安定マッチング集合の構造２

定理

μ, ν を安定マッチングとするとき，$\mu \vee \nu$, $\mu \wedge \nu$ は安定マッチング

ブロッキングペア (m, w) があると μ, ν の安定性に矛盾

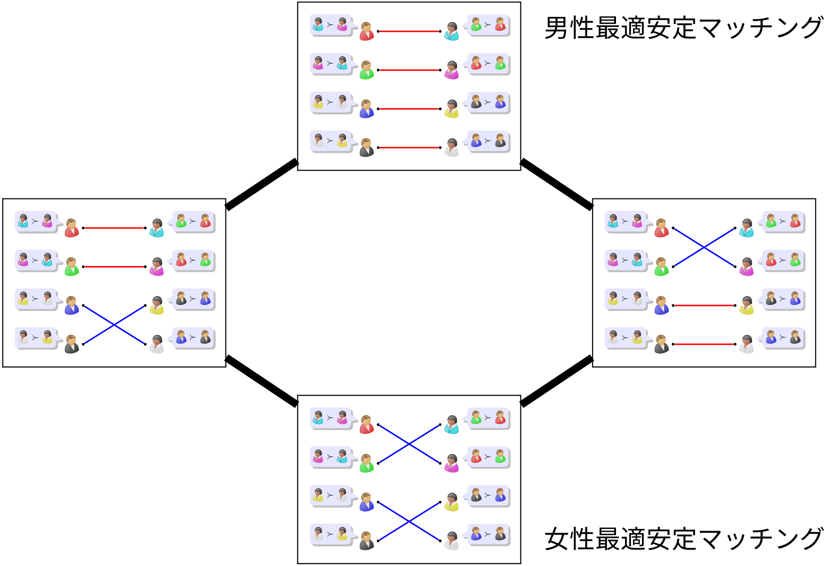


→ 安定マッチングの集合は束構造をもつ

→ 男性最適安定マッチング，女性最適安定マッチングが存在する

女性最悪安定マッチング　男性最悪安定マッチング

束構造の例



安定マッチングの個数を数えることは#P 完全

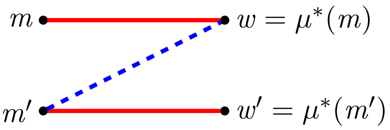
受入保留方式が見つける安定マッチング

定理

受入保留方式は男性最適安定マッチングを出力する

証明

- μ を受入保留方式の出力，μ^* を男性最適安定マッチングとする
- $\mu \neq \mu^*$ と仮定 $\longrightarrow$ ある m は $\mu^*(m)$ にリジェクトされる
- そのようなリジェクトのうち初めてのものを，
  m と $w := \mu^*(m)$ に対する m' によるものとする
- すると $m' \succ_w m$ かつ $w \succ_{m'} w'$ $\longrightarrow$ (m', w) は μ^* のブロッキングペア
  $\longrightarrow$ 矛盾



アウトライン

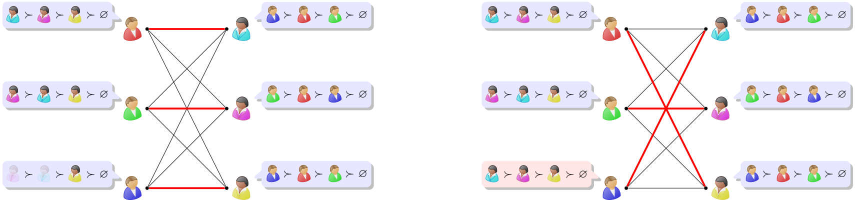
1. 参加者が選好をもつマッチング
2. 安定マッチング
3. 戦略的な問題
4. 演習

メカニズムの実行方法

- マッチングを計算するためには参加者の選好を集める必要がある
- 参加者は正直に選好を提出するとは限らず，嘘をつくかもしれない
  → 参加者が「標準的ゲーム」をプレイすると考える
- 正直に申告することが均衡になって欲しい

ボストン方式のインセンティブ問題

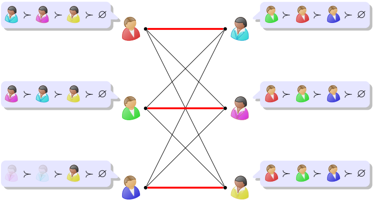
1. 各独身男性は，残っている中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性と結婚
3. 男女ともに独身のものが残っている場合は 1 に戻る

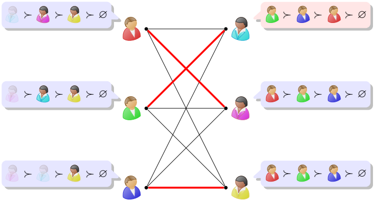


は嘘をつくことで得をできる

受入保留方式のインセンティブ問題

1. 各独身男性は，まだ断られていない中で最良の女性にプロポーズ
2. 各女性はプロポーズしてきた中で最良の男性以外を断る
3. 全男性が「プロポーズ中 or 全員に断られた」となっていなければ 1 へ





は嘘をつくことで得をする

耐戦略性

定義

$\varphi\colon ((\succ_m)_{m\in M}, (\succ_w)_{w\in W}) \mapsto \mu$

嘘の選好を提出することで得をすることはない方式を耐戦略的という

$\varphi[\succ_{M\cup W}](i) \succeq_i \varphi[\succ'_i, \succ_{-i}](i)\ \forall i \in M\cup W,\ \forall \succ'_i$

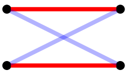
正直な選好提出が支配戦略均衡になるということ

定理

$|M|, |W| \geq 2$ のとき，安定マッチングを出力する耐戦略的な方式はない

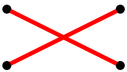
$m_1\colon w_1 \succ_{m_1} w_2 \succ_{m_1} \varnothing$ $\qquad$ $w_1\colon m_2 \succ_{w_1} m_1 \succ_{w_1} \varnothing$

$m_2\colon w_2 \succ_{m_2} w_1 \succ_{m_2} \varnothing$ $\qquad$ $w_2\colon m_1 \succ_{w_2} m_2 \succ_{w_2} \varnothing$



$m_1\colon w_1 \succ_{m_1} w_2 \succ_{m_1} \varnothing$ $\qquad$ $w_1\colon m_2 \succ_{w_1} \varnothing \succ_{w_1} m_1$

$m_2\colon w_2 \succ_{m_2} w_1 \succ_{m_2} \varnothing$ $\qquad$ $w_2\colon m_1 \succ_{w_2} m_2 \succ_{w_2} \varnothing$



耐戦略性

定義

$\varphi\colon ((\succ_m)_{m\in M}, (\succ_w)_{w\in W}) \mapsto \mu$

嘘の選好を提出することで得をすることはない 方式を耐戦略的という

$\varphi[\succ_{M\cup W}](i) \succeq_i \varphi[\succ'_i, \succ_{-i}](i)\ \forall i \in M \cup W, \forall \succ'_i$

正直な選好提出が支配戦略均衡になるということ

定理

$|M|, |W| \geq 2$ のとき，安定マッチングを出力する耐戦略的な方式はない

- 安定性か耐戦略性かのどちらかは諦める必要がある
- しかし部分的な耐戦略性なら満たすことができる

受入保留方式の男性耐戦略性

定理

受入保留方式 DA は男性（プロポーズする側）について耐戦略的

$\mathrm{DA}[\succ_{M \cup W}](m) \succeq_m \mathrm{DA}[(\succ'_m, \succ_{-m})](m)\ \forall m, \forall \succ'_m$

- プロポーズを受ける側の嘘を考慮しなくてよい場合もある
  - 試験の成績に基づく選好（学校選択）
  - 家庭状況に基づく選好（保育園割当）
- プロポーズする側についてだけでも耐戦略的であることは重要
- 証明は次のスライド

受入保留方式の男性耐戦略性 (証明)

- $P = ((\succ_m)_{m \in M}, (\succ_w)_{w \in W})$: 任意のプロファイル
- P': P から m^* の選好を適当に変更したプロファイル
- P^{alone}: P から m^* の選好を $w^* := \text{DA}[P'](m)$ だけ許容可能に変更
- P^{cut}: P から m^* の選好を w^* で打ち切りに変更

補題：$\text{DA}[P^{\text{alone}}](m^*) = w^*$　$\because$ $\text{DA}[P']$ は P^{alone} でも安定

$\longrightarrow$ 一匹狼定理より，m^* がマッチしないマッチングは P^{alone} で不安定

補題：$\text{DA}[P^{\text{cut}}](m) \succeq_m w^*$

- $\text{DA}[P^{\text{cut}}](m) = \varnothing$ ならば，$\text{DA}[P^{\text{cut}}]$ は P^{alone} で不安定
- そのときのブロッキングペアは P^{cut} においてもブロッキングペア
- $\text{DA}[P^{\text{cut}}]$ の P^{cut} における安定性に矛盾

定理：$\text{DA}[P](m) \succeq_m w^*$　$\because$ $\text{DA}[P^{\text{cut}}]$ は P でも安定で，$\text{DA}[P]$ は男性最適

受入保留方式の Nash 均衡

定理

任意のマッチング μ は Nash 均衡での結果として実現可能

- 各人 $i \in M \cup W$ は $\mu(i)$ だけを許容可能とする選好を提出したとする
- このとき受入保留方式の出力が μ となることは明らか
- 各 i は戦略を変更しても $\mu(i)$ か $\varnothing$ としかマッチできないので Nash 均衡

定理

任意の Nash 均衡の結果はマッチングである

- 各男性 m は誰も許容可能にしなければマッチしないので，$\mu(m) \succeq_m \varnothing$
- 各女性 w は誰も許容可能にしなければマッチしないので，$\mu(w) \succeq_w \varnothing$

女性のみ戦略的な場合の Nash 均衡 1

定理

女性のみ戦略的な場合，任意の安定マッチング μ は Nash 均衡での結果として実現可能

証明

- 各女性 $w \in W$ が $\mu(w)$ だけを許容可能とする選好を提出したとする
- 受入保留方式の結果が μ となることは明らか
- 各女性が最適反応となっていることも成立
  - $w \in W$ が逸脱することで m $(\succ_w \mu(w))$ とマッチできたとする
  - m は $\mu(m)$ より先に w へプロポーズするので $w \succ_m \mu(m)$
  - (m, w) は μ をブロックするので，μ の安定性に矛盾

女性のみ戦略的な場合の Nash 均衡 2

定理

女性のみ戦略的な場合，任意の Nash 均衡での結果 μ は安定マッチング

証明

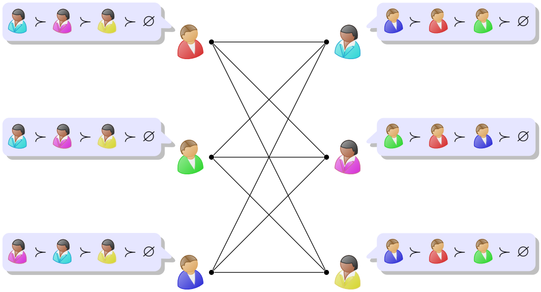
- 真の選好において μ が (m, w) にブロックされると仮定
- 提出された選好における受入保留方式では w は m をリジェクト
- w について，提出した選好から，m が一位となるように選好を変更したとすると，受入保留方式で m とマッチできる
- これは Nash 均衡であることに矛盾

耐戦略的なメカニズム

安定性を諦めれば耐戦略的なメカニズムは存在

順次独裁方式

1. 男性の順序 σ を決める
2. ラウンド i では σ_i が残っている中で最良の女性を選びマッチ

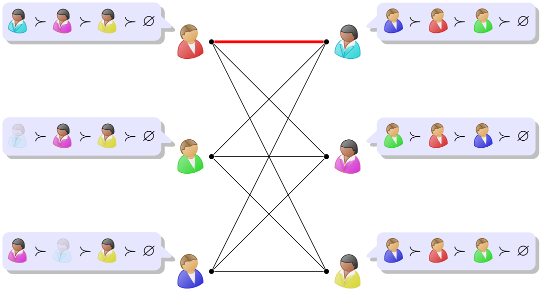


耐戦略的なメカニズム

安定性を諦めれば耐戦略的なメカニズムは存在

順次独裁方式

1. 男性の順序 σ を決める
2. ラウンド i では σ_i が残っている中で最良の女性を選びマッチ

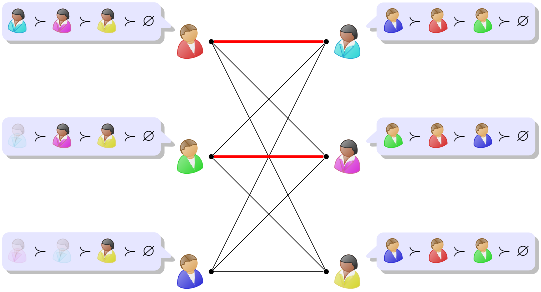


耐戦略的なメカニズム

安定性を諦めれば耐戦略的なメカニズムは存在

順次独裁方式

1. 男性の順序 σ を決める
2. ラウンド i では σ_i が残っている中で最良の女性を選びマッチ

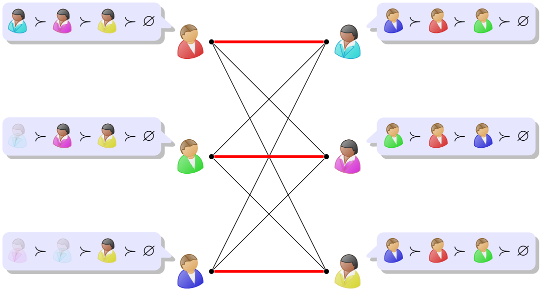


耐戦略的なメカニズム

安定性を諦めれば耐戦略的なメカニズムは存在

順次独裁方式

1. 男性の順序 σ を決める
2. ラウンド i では σ_i が残っている中で最良の女性を選びマッチ



耐戦略的なメカニズム

安定性を諦めれば耐戦略的なメカニズムは存在

順次独裁方式

1. 男性の順序 σ を決める
2. ラウンド i では σ_i が残っている中で最良の女性を選びマッチ

定理

順次独裁方式は耐戦略的であり，Pareto 効率的なマッチングを出力

- 各男性は残っている中で最良の女性とマッチできるので嘘をつくインセンティブはない
- 各女性の選好は無視されるので嘘をつくインセンティブはない
- マッチングを変更すると男性の誰かはマッチ相手が悪くなる

ただし安定とは限らず，プロポーズされる側に不利すぎる

アウトライン

1 参加者が選好をもつマッチング

2 安定マッチング

3 戦略的な問題

4 演習

演習

次のインスタンス $(M, W, (\succ_m)_{m \in M}, (\succ_w)_{w \in W})$ において安定マッチングを全て求めよ．

- $M = \{a, b, c, d\}$
- $y \succ_a w \succ_a x \succ_a z \succ_a \varnothing$
- $w \succ_b x \succ_b y \succ_b z \succ_b \varnothing$
- $z \succ_c y \succ_c w \succ_c x \succ_c \varnothing$
- $y \succ_d w \succ_d x \succ_d z \succ_d \varnothing$

- $W = \{x, y, z, w\}$
- $d \succ_x a \succ_x c \succ_x b \succ_x \varnothing$
- $b \succ_y c \succ_y a \succ_y d \succ_y \varnothing$
- $a \succ_z d \succ_z c \succ_z b \succ_z \varnothing$
- $d \succ_w a \succ_w c \succ_w b \succ_w \varnothing$