

数理情報工学特論第一 第1回

河瀬 康志

2022 年 10 月 7 日

last update: 2:49pm, October 7, 2022

概要

内容

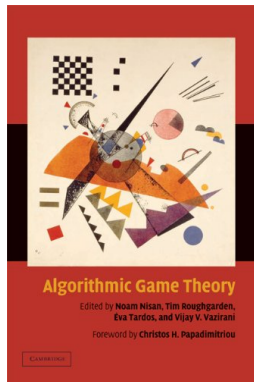
- 複数の意思決定主体が存在する状況において、数理情報学の技術がどのように活用されるかを学ぶ
- 特に、アルゴリズムや離散数学的な側面に重点を置き解説する

評価方法

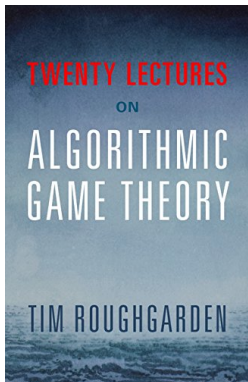
期末レポート

スケジュール

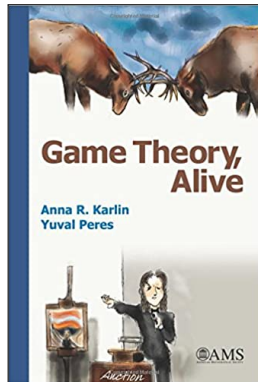
1. ゲーム理論の基礎 (10/7)
2. マッチング 1 (10/14)
3. マッチング 2 (10/21)
4. 公平割当 1 (10/28)
5. 公平割当 2 (11/4)
6. オークション 1 (11/11)
7. オークション 2 (11/18)



Noam Nisan, Tim Roughgarden,
Eva Tardos, Vijay V. Vazirani:
“Algorithmic Game Theory”



Tim Roughgarden: “Twenty
Lectures on Algorithmic Game
Theory”



Anna R. Karlin and Yuval Peres:
“Game Theory, Alive”

ゲーム理論とは

複数の意思決定主体の振る舞いを数学的に解析する理論

1944 年 John von Neumann and Oskar Morgenstern:

“Theory of Games and Economic Behavior” (ゲーム理論のはじまり)



<https://www.historyofinformation.com/detail.php?id=1803>

ゲームの例：囚人のジレンマ

囚人のジレンマのルール

- 2人の囚人が自白か黙秘かの選択に迫られている
- 選択によって刑期は下記のように定まる

A \ B	自白	黙秘
自白	(5 年, 5 年)	(0 年, 10 年)
黙秘	(10 年, 0 年)	(2 年, 2 年)

- 2人とも黙秘したら、それぞれの刑期は2年
- 相手が黙秘するなら、自分は自白した方が得（刑期 2 → 0 年）
- 相手が自白するときも、自分は自白した方が得（刑期 10 → 5 年）
- 2人とも自白したら、それぞれの刑期は5年

ゲームの例：男女の争い

男女の争いのルール

カップルが休日の過ごし方を検討している

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(2, 1)	(-1, -1)
バレエ	(-1, -1)	(1, 2)

- 男はボクシング，女はバレエを見に行きたい
- 一緒に行けないとお互いにマイナス

ゲームの例：じゃんけん

じゃんけんのルール

- 2人のプレイヤーが「グー」か「チョキ」か「パー」を選択
- 選択によって利得は下記のように定まる

A \ B	グー	チョキ	パー
グー	$(0, 0)$	$(+1, -1)$	$(-1, +1)$
チョキ	$(-1, +1)$	$(0, 0)$	$(+1, -1)$
パー	$(+1, -1)$	$(-1, +1)$	$(0, 0)$

- 相手が「グー」を出せば、自分は「パー」を出すべき
- 相手が「パー」を出せば、自分は「チョキ」を出すべき
- 相手が「チョキ」を出せば、自分は「グー」を出すべき

ゲームの例：環境保護ゲーム

環境保護ゲームのルール

- n ヶ国がそれぞれ環境保全に協力か非協力を選択
 - 保全の協力にはコストが 3 だけかかるとする
 - 非協力の場合，すべての国へコストが 1 にかかるとする
-
- k ヶ国が非協力のとき，協力している各国のコストは $k + 3$
 - k ヶ国が非協力のとき，非協力の各国のコストは k
 - みんな協力しなくなると各国のコストは n
 - みんなが協力すれば各国のコストは 3

標準型ゲーム (戦略型ゲーム)

標準型ゲーム $(N, (S_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N})$

- プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- 各プレイヤー $i \in N$ に対する戦略の集合 S_i
- 各プレイヤー $i \in N$ に対する利得関数 $f_i: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$

あるいはコスト

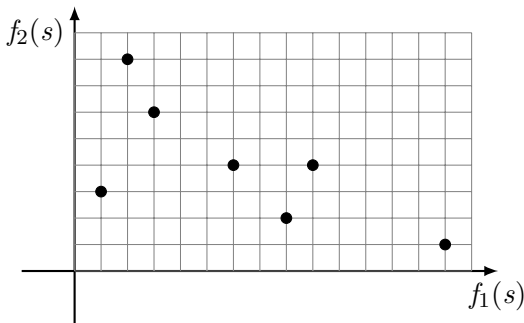
- 各プレイヤー i が戦略 s_i を選択した時, i の利得は $f_i(s_1, \dots, s_n)$
- 各プレイヤーは, 自分の利得を最大化するように行動する
(自分のコストを最小化するように行動する)
- 各プレイヤーは $(N, (S_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N})$ を知っている

社会的に望ましい結果：Pareto 効率性

2 つの戦略の組 s, s' において, s が s' を **Pareto 支配** するとは

- $f_i(s) \geq f_i(s') \ (\forall i \in N)$
- $f_i(s) > f_i(s') \ (\exists i \in N)$

戦略の組 s が他のどの戦略の組 s' から **Pareto 支配** されないとき, s は **Pareto 効率的** であるという

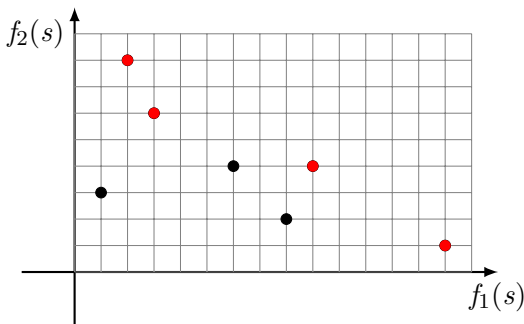


社会的に望ましい結果：Pareto 効率性

2つの戦略の組 s, s' において、 s が s' を **Pareto 支配** するとは

- $f_i(s) \geq f_i(s') \ (\forall i \in N)$
- $f_i(s) > f_i(s') \ (\exists i \in N)$

戦略の組 s が他のどの戦略の組 s' から **Pareto 支配** されないとき、 s は **Pareto 効率的** であるという



社会的に望ましい結果：Pareto 効率性

2つの戦略の組 s, s' において、 s が s' を **Pareto 支配** するとは

- $f_i(s) \geq f_i(s') \quad (\forall i \in N)$
- $f_i(s) > f_i(s') \quad (\exists i \in N)$

戦略の組 s が他のどの戦略の組 s' から **Pareto 支配** されないとき、 s は **Pareto 効率的** であるという

囚人のジレンマ

A \ B	自白	黙秘
自白	(5 年, 5 年)	(0 年, 10 年)
黙秘	(10 年, 0 年)	(2 年, 2 年)

(自白, 自白) 以外が Pareto 効率的

男女の争い

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(2, 1)	(-1, -1)
バレエ	(-1, -1)	(1, 2)

同じ選択をすることが Pareto 効率的

社会的に望ましい結果：Pareto 効率性

2つの戦略の組 s, s' において、 s が s' を Pareto 支配するとは

- $f_i(s) \geq f_i(s') \quad (\forall i \in N)$
- $f_i(s) > f_i(s') \quad (\exists i \in N)$

戦略の組 s が他のどの戦略の組 s' から Pareto 支配されないとき、 s は Pareto 効率的であるという

環境保護ゲーム

- n ケ国がそれぞれ環境保全に協力か非協力を選択
- 保全の協力にはコストが 3 だけかかる
- 非協力の場合、すべての国へコストが 1 かかる

$n > 3$ のとき、非協力の国が 2 カ国以下の戦略組は Pareto 効率的

支配戦略

合理的なプレイヤーが選択すると予想されるもの

定義

$$(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in \prod_{j \neq i} S_j$$

プレイヤー i の戦略 s_i が**支配戦略**であるとは、任意の戦略の組 s_{-i} と任意の $s'_i \in S_i \setminus \{s_i\}$ に対して、 $f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(s'_i, s_{-i})$ が成立すること

定義

プレイヤーの戦略の組 $s^* = (s_1^*, \dots, s_N^*)$ が**支配戦略均衡**であるとは、すべてのプレイヤー i について s_i^* が支配戦略となること

囚人のジレンマ

A \ B	自白	黙秘
自白	(5 年, 5 年)	(0 年, 10 年)
黙秘	(10 年, 0 年)	(2 年, 2 年)

支配戦略均衡は (自白, 自白)

男女の争い

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(2, 1)	(-1, -1)
バレエ	(-1, -1)	(1, 2)

支配戦略均衡はない

支配戦略均衡は存在しないかもしれず、あっても Pareto 効率的とは限らない

支配戦略

合理的なプレイヤーが選択すると予想されるもの

定義

$$(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in \prod_{j \neq i} S_j$$

プレイヤー i の戦略 s_i が**支配戦略**であるとは、任意の戦略の組 s_{-i} と任意の $s'_i \in S_i \setminus \{s_i\}$ に対して、 $f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(s'_i, s_{-i})$ が成立すること

定義

プレイヤーの戦略の組 $s^* = (s_1^*, \dots, s_N^*)$ が**支配戦略均衡**であるとは、すべてのプレイヤー i について s_i^* が支配戦略となること

環境保護ゲーム

- n ケ国がそれぞれ環境保全に協力か非協力を選択
- 保全の協力にはコストが 3 だけかかる
- 非協力の場合、すべての国へコストが 1 かかる

支配戦略均衡は全ての国が非協力

Nash 均衡

互いに相手の行動に対する最適な反応となっている状態 (支配戦略均衡を弱めた概念)

定義

$$(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

プレイヤー i の戦略 s_i が、他のプレイヤーの戦略の組 s_{-i} に対して最適反応であるとは、 $s_i \in \arg \max_{s'_i \in S_i} f_i(s'_i, s_{-i})$ となること

定義

プレイヤーの戦略の組 $s^* = (s_1^*, \dots, s_N^*)$ が Nash 均衡であるとは、すべてのプレイヤー i について s_i^* が s_{-i}^* に対する最適反応であるときをいう

囚人のジレンマ

A \ B	自白	黙秘
自白	(5 年, 5 年)	(0 年, 10 年)
黙秘	(10 年, 0 年)	(2 年, 2 年)

Nash 均衡は (自白, 自白)

男女の争い

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(2, 1)	(-1, -1)
バレエ	(-1, -1)	(1, 2)

Nash 均衡は (ボクシング, ボクシング) と (バレエ, バレエ)

Nash 均衡

互いに相手の行動に対する最適な反応となっている状態 (支配戦略均衡を弱めた概念)

定義

$$(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

プレイヤー i の戦略 s_i が、他のプレイヤーの戦略の組 s_{-i} に対して最適反応であるとは、 $s_i \in \arg \max_{s'_i \in S_i} f_i(s'_i, s_{-i})$ となること

定義

プレイヤーの戦略の組 $s^* = (s_1^*, \dots, s_N^*)$ が Nash 均衡であるとは、すべてのプレイヤー i について s_i^* が s_{-i}^* に対する最適反応であるときをいう

じゃんけん

A \ B	グー	チョキ	パー
グー	(0, 0)	(+1, -1)	(-1, +1)
チョキ	(-1, +1)	(0, 0)	(+1, -1)
パー	(+1, -1)	(-1, +1)	(0, 0)

Nash 均衡はない

混合戦略と純粋戦略

- 確率分布に従って $s \in S_i$ を選択する戦略を混合戦略という
集合 X に対し、 X 上のすべての確率分布の集合を $\Delta(X)$ で表すことにする
- 確定的にある行動を選択する戦略を純粋戦略という
- 各プレイヤー i が混合戦略 $q_i \in \Delta(S_i)$ を選択した時、 i の利得は

$$F_i(\mathbf{q}) := \mathbb{E}_{s \sim \mathbf{q}}[f_i(s)] = \sum_{s \in S_1 \times \dots \times S_n} f_i(s) \prod_{j \in N} q_j(s_j)$$

- 混合戦略の組に対する Pareto 効率性、最適反応、Nash 均衡などは純粋戦略の場合と同様に定義される

(混合戦略) Nash 均衡の例

男女の争い

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(2, 1)	(-1, -1)
バレエ	(-1, -1)	(1, 2)

Nash 均衡は
(ボクシング, ボクシング) と
(バレエ, バレエ) と

$$\left(\begin{array}{cc} \text{ボクシング w.p. } \frac{2}{5} & \text{ボクシング w.p. } \frac{2}{5} \\ \text{バレエ w.p. } \frac{3}{5} & \text{バレエ w.p. } \frac{3}{5} \end{array} \right)$$

じゃんけん

A \ B	グー	チョキ	パー
グー	(0, 0)	(+1, -1)	(-1, +1)
チョキ	(-1, +1)	(0, 0)	(+1, -1)
パー	(+1, -1)	(-1, +1)	(0, 0)

Nash 均衡は

$$\left(\begin{array}{cc} \text{グー w.p. } \frac{1}{3} & \text{グー w.p. } \frac{1}{3} \\ \text{チョキ w.p. } \frac{1}{3} & \text{チョキ w.p. } \frac{1}{3} \\ \text{パー w.p. } \frac{1}{3} & \text{パー w.p. } \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

(混合戦略) Nash 均衡の存在性

定理

任意の (有限) 標準的ゲームは、少なくとも 1 つの Nash 均衡をもつ

証明の道具：Brouwer の不動点定理

X をコンパクトな凸集合とすると、連続写像 $f: X \rightarrow X$ は $f(x^*) = x^*$ となる不動点 $x^* \in X$ をもつ

証明

- 混合戦略の組 q から q' を返す次のような写像を考える：
 - $q'_i(s_i) := \frac{q_i(s_i) + \max\{0, F_i(s_i, q_{-i}) - F_i(q)\}}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} \max\{0, F_i(s'_i, q_{-i}) - F_i(q)\}}$ より良い反応となる戦略の重みを増やす写像
- q' は戦略の組となっており ($\sum_{s'_i \in S_i} q'_i(s_i) = 1, q'_i(s_i) \geq 0$),
写像 $q \mapsto q'$ は $\prod_{i \in N} \Delta(S_i)$ 上の連続関数なので不動点が存在
コンパクトな凸集合

(混合戦略) Nash 均衡の存在性

定理

任意の (有限) 標準的ゲームは、少なくとも 1 つの Nash 均衡をもつ

証明

- 不動点 q^* について考える $q_i^*(s_i) = \frac{q_i^*(s_i) + \max\{0, F_i(s_i, q_{-i}^*) - F_i(q^*)\}}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} \max\{0, F_i(s'_i, q_{-i}^*) - F_i(q^*)\}}$
- 条件を整理すると、任意の $s_i \in S_i$ について

$$\max\{0, F_i(s_i, q_{-i}^*) - F_i(q^*)\} = q_i^*(s_i) \sum_{s'_i \in S_i} \max\{0, F_i(s'_i, q_{-i}^*) - F_i(q^*)\}$$

- $\hat{s}_i \in \arg \min_{s'_i \in S_i} \{F_i(s'_i, q_{-i}^*) \mid q_i^*(s'_i) > 0\}$ について考えると,
 - $F_i(\hat{s}_i, q_{-i}^*) \leq F_i(q^*)$ ($\because$ 最小値は平均値以下)
 - $\sum_{s'_i \in S_i} \max\{0, F_i(s'_i, q_{-i}^*) - F_i(q^*)\} = 0$ ($\because s_i = \hat{s}_i$ の条件を整理した式)
 - $F_i(s_i, q_{-i}^*) \leq F_i(q^*)$ ($\forall s_i \in S_i$) ($\because$ 条件を整理した式)
- よって、すべてのプレイヤーは最適反応戦略なので、 q^* は Nash 均衡

Nash 均衡の計算

問題

Nash 均衡の計算は効率的にできるか？

不動点定理は存在性を示すのみで、アルゴリズムは与えない

- 「与えられたゲームに Nash 均衡が存在するか？」という意味なら簡単に YES が答え
- 次のような意味なら NP-hard (プレイヤー数が 2 でも)
 - Nash 均衡が 2 つ以上存在するか
 - プレイヤー 1 の効用が指定された値以上の Nash 均衡が存在するか
 - ある戦略 s をサポートに含むような Nash 均衡が存在するか
- Nash 均衡を 1 つ見つけるということも難しそう (PPAD-hard)

Polynomial Parity Arguments on Directed graphs

2人零和標準型ゲームの Nash 均衡

零和: $f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0 \quad (\forall s_1 \in S_1, \forall s_2 \in S_2)$

プレイヤー 1 は $f (= f_1)$ を最大化, プレイヤー 2 は f を最小化しようとするものとみなせる

定理

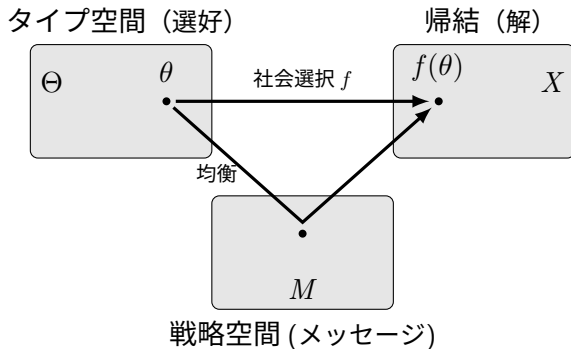
2人零和標準型ゲームの Nash 均衡は多項式時間で計算可能

$$\begin{array}{ll} \max & v \\ \text{s.t.} & v \leq \sum_{s_1} f(s_1, s_2) q_1(s_1) \quad (\forall s_2 \in S_2) \\ & \sum_{s_1} q_1(s_1) = 1 \\ & q_1(s_1) \geq 0 \quad (\forall s_1 \in S_1) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & u \\ \text{s.t.} & u \geq \sum_{s_2} f(s_1, s_2) q_2(s_2) \quad (\forall s_1 \in S_1) \\ & \sum_{s_2} q_2(s_2) = 1 \\ & q_2(s_2) \geq 0 \quad (\forall s_2 \in S_2) \end{array}$$

- 上の2つの線形計画問題の最適解を (v^*, q_1^*) , (u^*, q_2^*) とする
- 強双対定理より $\min_{s_2 \in S_2} f(s_1, s_2) q_1^*(s_1) = v^* = u^* = \max_{s_1 \in S_1} f(s_1, s_2) q_2^*(s_2)$
- $v^* = \min_{q_2 \in \Delta(S_2)} F(q_1^*, q_2) \leq F(q_1^*, q_2^*) \leq \max_{q_1 \in \Delta(S_1)} F(q_1, q_2^*) = u^*$
- 等号が成り立つので, (q_1^*, q_2^*) は Nash 均衡

メカニズムデザイン

- 「ゲーム」を設計することを考える
- 望ましい帰結が支配戦略均衡として得られることを目指す



男女の争いにおいて混合戦略で達成可能な期待利得の組を図示せよ。
また, Pareto 効率的な戦略の組を全て求めよ。

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	$(2, 1)$	$(-1, -1)$
バレエ	$(-1, -1)$	$(1, 2)$