

# 数理・計算科学特論 C 第 7 回

河瀬 康志

2021 年 6 月 29 日

# 今日の後半でやること

- リクエストの分布が既知の場合における競合比解析
- 「預言者の不等式」を扱う

- ① 預言者の不等式
- ② 順序選択預言者の不等式
- ③ 複数選択預言者の不等式
- ④ 演習とレポート

# 預言者の不等式

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は  $1, 2, \dots, n$  の  $n$  人いて、この順で面接を行う
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 候補者  $i$  の価値は既知の確率分布  $F_i$  に従い、面接時に確定
  - ▶ 候補者  $i$  の価値を確率変数  $X_i$  で表すことにする
  - ▶  $X_1, \dots, X_n$  は非負で独立と仮定
  - ▶  $\mathbb{E}[\max_i X_i] < \infty$  と仮定
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

## 応用例

- 1 個の商品を逐次的に来る  $n$  人の客の誰かに売る
- $i$  番目の客には  $X_i$  円で売ることができる

最適戦略は動的計画法によって簡単に計算可能

例:  $n = 3$ ,  $F_1, F_2, F_3$  が  $[0, 1]$  上の独立一様分布のとき

- 候補者 1, 2 を雇わず 3 を面接したとき  $\Rightarrow$  期待利得  $\frac{1}{2}$
- 候補者 1 を雇わず 2 を面接したとき  $\Rightarrow$  期待利得  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$   
(価値  $\frac{1}{2}$  以上なら雇い,  $\frac{1}{2}$  未満なら断る)
- 候補者 1 を面接したとき  $\Rightarrow$  期待利得  $\frac{13}{16} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{89}{128}$   
(価値  $\frac{5}{8}$  以上なら雇い,  $\frac{5}{8}$  未満なら断る)

最適戦略は動的計画法によって簡単に計算可能

例:  $n = 3$ ,  $F_1, F_2, F_3$  が  $[0, 1]$  上の独立一様分布のとき

- 候補者 1, 2 を雇わず 3 を面接したとき  $\Rightarrow$  期待利得  $\frac{1}{2}$
- 候補者 1 を雇わず 2 を面接したとき  $\Rightarrow$  期待利得  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$   
(価値  $\frac{1}{2}$  以上なら雇い,  $\frac{1}{2}$  未満なら断る)
- 候補者 1 を面接したとき  $\Rightarrow$  期待利得  $\frac{13}{16} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{89}{128}$   
(価値  $\frac{5}{8}$  以上なら雇い,  $\frac{5}{8}$  未満なら断る)

→ では  $\mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i]$  に対してどれだけの割合を保証できる？

## 定理

任意の  $\epsilon > 0$  に対し,  $\frac{1}{2-\epsilon} \mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i]$  しか取れない場合あり

## 証明

$$n = 2, X_1 = 1 \text{ (w.p. } 1), X_2 = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{(w.p. } \epsilon) \\ 0 & \text{(w.p. } 1 - \epsilon) \end{cases}$$

- $\mathbb{E}[\max\{X_1, X_2\}] = \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon + 1 \cdot (1 - \epsilon) = 2 - \epsilon$
- アルゴリズムは, 1 を取るか取らないかの選択しかなく, 1 を確率  $q$  でとる場合,  $\mathbb{E}[X_T] \geq q + (1 - q) \cdot (1/\epsilon) \cdot \epsilon = 1$

# 閾値戦略

定理 ([Krengel, Sucheston, Garling 1978])

閾値戦略により競合比  $1/2$  が達成できる

証明

$x$  以上ならば採用という閾値戦略

誰も採用できない確率

- $\tau := (\min i \text{ such that } X_i \geq x)$ ,  $p := \prod_{i=1}^n F_i(x)$  とする
- $E_i$  は「 $i - 1$  まで誰も雇わない事象」とする  $X_k < x$  ( $\forall k = 1, \dots, i - 1$ )
- 閾値戦略の期待利得  $\mathbb{E}[X_\tau]$  は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\tau] &= (1 - p)x + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - x) \mid E_i, X_i \geq x] \Pr[E_i, X_i \geq x] \\ &= (1 - p)x + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - x) \mid X_i \geq x] \Pr[E_i, X_i \geq x] \quad \text{分布の独立性} \\ &= (1 - p)x + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - x)^+] \Pr[E_i] \quad \begin{array}{l} (X_i - x)^+ := \max\{X_i - x, 0\} \\ X_i < x \text{ の時は } (X_i - x)^+ = 0 \end{array} \\ &\geq (1 - p)x + p \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - x)^+] \quad p \leq \Pr[E_i] \\ &\geq (1 - p)x + p \mathbb{E}[\max_{i=1}^n (X_i - x)^+] \quad \sum_{i=1}^n (X_i - x)^+ \geq \max_{i=1}^n (X_i - x)^+ \end{aligned}$$

- $p = 1/2$  となる  $x$  ( $\max_i X_i$  の中央値) を選択  
→  $\mathbb{E}[X_\tau] \geq \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[\max_{i=1}^n (X_i - x)^+] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i]$



定理 ([Krengel, Sucheston, Garling 1978])

閾値戦略により競合比  $1/2$  が達成できる

- 閾値戦略は競合比の意味で最適だけでなく、様々なよい性質を満たす
  - ▶ どの候補者も分布によらず一律に扱われる
  - ▶ 面接の順序に依存しない
  - ▶ 雇うかどうかのルールは進捗によって変化しない
  - ▶ 商品卖房の場合では、客が嘘をついても得できない
- 閾値として  $\frac{1}{2}\mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i]$  を選んでも競合比  $1/2$  (演習)

# 拡張しやすいアルゴリズム

閾値戦略は色々良い性質を満たすが拡張しにくいので、  
拡張しやすい競合比  $1/2$  のアルゴリズムを与える

# 拡張しやすいアルゴリズム

閾値戦略は色々良い性質を満たすが拡張しにくいので、  
拡張しやすい競合比  $1/2$  のアルゴリズムを与える

## 記号準備

- $p_i := \Pr[X_i = \max_{j=1}^n X_j]$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  (同率一位の場合は適当に確率を分ける)
  - $x_i := F_i^{-1}(1 - p_i)$ ,  $\Pr[X_i \geq x_i] = p_i$
  - $v_i := \mathbb{E}[X_i \mid X_i \geq x_i]$
- $\mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \mid X_i = \max_{j=1}^n X_j] \leq \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i$

# 拡張しやすいアルゴリズム

閾値戦略は色々良い性質を満たすが拡張しにくいので、  
拡張しやすい競合比  $1/2$  のアルゴリズムを与える

## 記号準備

- $p_i := \Pr[X_i = \max_{j=1}^n X_j]$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  (同率一位の場合は適当に確率を分ける)
  - $x_i := F_i^{-1}(1 - p_i)$ ,  $\Pr[X_i \geq x_i] = p_i$
  - $v_i := \mathbb{E}[X_i \mid X_i \geq x_i]$
- $\mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \mid X_i = \max_{j=1}^n X_j] \leq \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i$

$i-1$  まで誰も雇わない確率を  $r_i$ ,  $q_i = \frac{1}{2r_i}$  とする

アルゴリズム: 各  $i$  について確率  $q_i$  で検討をし,  $X_i \geq x_i$  なら採用

# 拡張しやすいアルゴリズム

閾値戦略は色々良い性質を満たすが拡張しにくいので、  
拡張しやすい競合比  $1/2$  のアルゴリズムを与える

## 記号準備

- $p_i := \Pr[X_i = \max_{j=1}^n X_j]$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  (同率一位の場合は適当に確率を分ける)
  - $x_i := F_i^{-1}(1 - p_i)$ ,  $\Pr[X_i \geq x_i] = p_i$
  - $v_i := \mathbb{E}[X_i \mid X_i \geq x_i]$
- $\mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \mid X_i = \max_{j=1}^n X_j] \leq \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i$

$i-1$  まで誰も雇わない確率を  $r_i$ ,  $q_i = \frac{1}{2r_i}$  とする

アルゴリズム: 各  $i$  について確率  $q_i$  で検討をし,  $X_i \geq x_i$  なら採用

## アルゴリズムの実行可能性

$$r_{i+1} = r_i(1 - q_i p_i) = r_i - \frac{1}{2} p_i, \quad r_i = r_1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} p_j \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

→  $\frac{1}{2} \leq q_i \leq 1$  なので実行可能

# 拡張しやすいアルゴリズム

閾値戦略は色々良い性質を満たすが拡張しにくいので、  
拡張しやすい競合比  $1/2$  のアルゴリズムを与える

## 記号準備

- $p_i := \Pr[X_i = \max_{j=1}^n X_j]$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  (同率一位の場合は適当に確率を分ける)
  - $x_i := F_i^{-1}(1 - p_i)$ ,  $\Pr[X_i \geq x_i] = p_i$
  - $v_i := \mathbb{E}[X_i \mid X_i \geq x_i]$
- $\mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \mid X_i = \max_{j=1}^n X_j] \leq \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i$

$i-1$  まで誰も雇わない確率を  $r_i$ ,  $q_i = \frac{1}{2r_i}$  とする

アルゴリズム: 各  $i$  について確率  $q_i$  で検討をし,  $X_i \geq x_i$  なら採用

## 解析

$$\mathbb{E}[\text{アルゴリズムの利得}] = \sum_{i=1}^n r_i \cdot q_i \cdot p_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i v_i \geq \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E} \left[ \max_{i=1}^n X_i \right]$$

# 分布についての問題

- 分布が陽に与えられていたとしても閾値の計算は難しい
- そもそも分布は陽にはわからず，サンプルアクセスしかできないかも
- 中央値を閾値として使う場合， $O\left(\frac{1}{\epsilon^2} \log \frac{1}{\delta}\right)$  個のサンプルがあれば，誤差  $\epsilon$  以内の値を確率  $1 - \delta$  以上で求めることはできる
- しかし，もっとサンプル数を減らしつつうまくできないか？

# 分布についての問題

- 分布が陽に与えられていたとしても閾値の計算は難しい
- そもそも分布は陽にはわからず，サンプルアクセスしかできないかも
- 中央値を閾値として使う場合， $O\left(\frac{1}{\epsilon^2} \log \frac{1}{\delta}\right)$  個のサンプルがあれば，誤差  $\epsilon$  以内の値を確率  $1 - \delta$  以上で求めることはできる
- しかし，もっとサンプル数を減らしつつうまくできないか？  
→ できる！ 各  $X_i$  のサンプルが1つずつあれば十分！



# 1 サンプルアルゴリズム [Rubinstein, Wang, Weinberg, 2020]

1.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  から 1 つずつサンプルをとり, その最大値を閾値とする
2. 閾値以上の値の候補者が来たら採用

## 定理

1 サンプルアルゴリズムの競合比は  $1/2$

# 1 サンプルアルゴリズム [Rubinstein, Wang, Weinberg, 2020]

1.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  から 1 つずつサンプルをとり, その最大値を閾値とする
2. 閾値以上の値の候補者が来たら採用

## 定理

1 サンプルアルゴリズムの競合比は  $1/2$

## 証明

- $X_1, X_2, \dots, X_n$  から 2 つずつサンプルをとり, 片方を閾値用, もう片方を入力だと解釈することにする
- どちらが閾値用でどちらが入力かは後からランダムに決めると解釈
- $W_1 \geq W_2 \geq \dots \geq W_{2n}$  を  $2n$  個のサンプルを降順に並べたものとする
- $W_i, W_{j^*}$  ( $i < j^*$ ) を同じ分布からのサンプルで  $j^*$  が最小のものとする

# 1 サンプルアルゴリズム [Rubinstein, Wang, Weinberg, 2020]

1.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  から 1 つずつサンプルをとり, その最大値を閾値とする
2. 閾値以上の値の候補者が来たら採用

## 定理

1 サンプルアルゴリズムの競合比は  $1/2$

## 証明

|                                                                               | $W_1$         | $W_2$           | $\dots$ | $W_i$           | $\dots$ | $W_{j^*-1}$           | $W_{j^*}$             | $\dots$ |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------|-----------------|---------|-----------------|---------|-----------------------|-----------------------|---------|
| $\left\{ \begin{array}{c} \text{最適解} \\ \text{閾値} \end{array} \right\}$ となる確率 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\dots$ | $\frac{1}{2^i}$ | $\dots$ | $\frac{1}{2^{j^*-1}}$ | $\frac{1}{2^{j^*-1}}$ | 0       |

- $\mathbb{E}[\text{OPT}] = \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2^2} \cdot W_2 + \dots + \frac{1}{2^{j^*-1}} \cdot W_{j^*-1} + \frac{1}{2^{j^*-1}} \cdot W_{j^*}$
- $\mathbb{E}[\text{ALG}] \geq \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2^2} \cdot W_1 + \dots + \frac{1}{2^{j^*-1}} \cdot W_{j^*-2} + \frac{1}{2^{j^*-1}} \cdot W_{j^*-1}$

$W_2$  が閾値なら  $W_1$  を採用できる

→ 競合比は  $1/2$

$W_1$  が閾値の場合は誰も採用できない

- 1 預言者の不等式
- 2 順序選択預言者の不等式
- 3 複数選択預言者の不等式
- 4 演習とレポート

# 順序選択預言者の不等式

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は  $1, 2, \dots, n$  の  $n$  人いて、好きな順で面接を行う
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 候補者  $i$  の価値は既知の確率分布  $F_i$  に従い、面接時に確定
  - ▶ 候補者  $i$  の価値を確率変数  $X_i$  で表すことにする
  - ▶  $X_1, \dots, X_n$  は非負で独立と仮定
  - ▶  $\mathbb{E}[\max_i X_i] < \infty$  と仮定
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

## 記号準備

- $p_i := \Pr[X_i = \max_{j=1}^n X_j]$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  (同率一位の場合は適当に確率を分ける)
  - $x_i := F_i^{-1}(1 - p_i)$ ,  $\Pr[X_i \geq x_i] = p_i$
  - $v_i := \mathbb{E}[X_i \mid X_i \geq x_i]$
- $\mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \mid X_i = \max_{j=1}^n X_j] \leq \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i$

アルゴリズム:  $v_i$  の降順で面接をし,  $X_i \geq x_i$  なら採用

解析 ( $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$  と仮定)

$$\mathbb{E}[\text{アルゴリズムの利得}] = \sum_{i=1}^n \underbrace{r_i}_{\prod_{j=1}^{i-1} (1-p_j)} \cdot p_i \cdot v_i$$

$$\stackrel{\substack{v_1 \geq \dots \geq v_n, r_1 \geq \dots \geq r_n \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ よりチェビシェフの不等式}}}{\geq} \left( \sum_{i=1}^n p_i r_i \right) \left( \sum_{i=1}^n p_i v_i \right) = \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right) \cdot \sum_{i=1}^n p_i v_i$$

$$\stackrel{\substack{\text{相乗平均} \leq \text{相加平均より} \\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1-p_i)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-p_i) = 1 - \frac{1}{n}}}{\geq} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n \right) \cdot \sum_{i=1}^n p_i v_i \geq \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \cdot \mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i]$$

0.6321

- 好きな順に面接できる場合には競合比  $1 - \frac{1}{e}$  以上にできる
- 全員の分布が同じ場合も、同じ解析により競合比  $1 - \frac{1}{e}$  以上にできる
- しかし、これが最良というわけではない
  - ▶ 同一分布の場合の場合の競合比は 0.7451 [Hill, Kertz 1982; Correa et al. 2017]
  - ▶ 一般の場合の現在最良は競合比 0.6543 [Beyhaghi et al. 2018]  
最良の上界は同一分布の場合と同じで 0.7451

- 1 預言者の不等式
- 2 順序選択預言者の不等式
- 3 複数選択預言者の不等式**
- 4 演習とレポート



# 複数選択預言者の不等式

- 意思決定者は秘書を  $k$  人採用しようとしている
- 候補者は  $1, 2, \dots, n$  の  $n$  人いて、この順で面接を行う ( $n > k$  と仮定)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 候補者  $i$  の価値は既知の確率分布  $F_i$  に従い、面接時に確定
  - ▶ 候補者  $i$  の価値を確率変数  $X_i$  で表すことにする
  - ▶  $X_1, \dots, X_n$  は非負で独立と仮定
  - ▶  $\text{OPT} := (X_1, \dots, X_n \text{ の上位 } k \text{ 個の和})$
  - ▶  $\mathbb{E}[\text{OPT}] < \infty$  と仮定
- 採用した候補者の価値の和がなるべく大きくなるようにしたい

最適戦略は動的計画法によって簡単に計算可能

- $T(i, s) := (i \text{ 以降で } s \text{ 人雇える時の最適戦略での期待利得})$

- ▶  $T(n, s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s = 0, \\ \mathbb{E}[X_n] & \text{if } s > 0 \end{cases}$

- ▶  $T(i, s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s = 0, \\ \mathbb{E}[\max\{X_i + T(i+1, s-1), T(i+1, s)\}] & \text{if } s > 0 \end{cases}$

- $T(1, k)$  が最適戦略での期待利得
- $i$  さんとの面接で、残り  $s$  人雇える時には、  
 $T(i+1, s) - T(i+1, s-1)$  以上の価値ならば採用すれば良い

## 定理

競合比の下界は  $1 - \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

## 証明

- 入力:  $n = 3k$ 
  - ▶  $i = 1, \dots, k$ :  $X_i = 1$  (w.p. 1),
  - ▶  $i = k + 1, \dots, 3k$ :  $X_i = \begin{cases} 2 & \text{(w.p. 1/2)} \\ 0 & \text{(w.p. 1/2)} \end{cases}$
- $\mathbb{E}[\text{OPT}] = \Theta(k)$
- アルゴリズムは、最初の  $k$  個のうち何個取るかで分類できるが、どの場合も  $\mathbb{E}[\text{ALG}] = \mathbb{E}[\text{OPT}] - \Theta(\sqrt{k})$

# 複数選択アルゴリズム

## 記号準備

- $p_i := \Pr[X_i \text{が } k \text{ 位以上}], \quad \sum_{i=1}^n p_i = k$
- $x_i$ :  $\Pr[X_i \geq x_i] = p_i$  となる値,  $v_i := \mathbb{E}[X_i \mid X_i \geq x_i]$
- $\mathbb{E}[\text{OPT}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \mid X_i \text{が } k \text{ 位以上}] \leq \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i$

$\sqrt{3 \log k/k}$  に設定

アルゴリズム: 各  $i$  について確率  $(1 - \delta)$  で検討をし,  $X_i \geq x_i$  なら採用

低確率でスキップすることで後ろの候補者の可能性を残す.  $k$  人より多く雇ってしまった場合は利得 0 とする

## 性質

$k$  人以上雇ってしまう確率は高々  $\exp(-\frac{\delta^2 k}{3}) = O(1/k)$

- $\Pr[i \text{を採用}] = (1 - \delta)p_i$
- $\mathbb{E}[\text{雇う人数}] = \sum_{i=1}^n \Pr[i \text{を採用}] = (1 - \delta)k$
- $\Pr[k \text{ 人以上雇う}] \leq \exp\left(-\frac{(1-\delta)k}{3} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^2\right) \leq \exp(-\frac{\delta^2 k}{3})$  (Chernoff の不等式)

# 複数選択アルゴリズム

## 記号準備

- $p_i := \Pr[X_i \text{が } k \text{ 位以上}], \quad \sum_{i=1}^n p_i = k$
  - $x_i$ :  $\Pr[X_i \geq x_i] = p_i$  となる値,  $v_i := \mathbb{E}[X_i \mid X_i \geq x_i]$
- $\mathbb{E}[\text{OPT}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \mid X_i \text{が } k \text{ 位以上}] \leq \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i$

$\sqrt{3 \log k / k}$  に設定

アルゴリズム: 各  $i$  について確率  $(1 - \delta)$  で検討をし,  $X_i \geq x_i$  なら採用

低確率でスキップすることで後ろの候補者の可能性を残す.  $k$  人より多く雇ってしまった場合は利得 0 とする

## 解析

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{ALG}] &\geq \sum_{i=1}^n \left(1 - O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \cdot (1 - \delta) p_i \cdot \mathbb{E}[X_i \mid X_i \geq x_i] \\ &\geq \sum_{i=1}^n \left(1 - O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \cdot \left(1 - O\left(\sqrt{\frac{\log k}{k}}\right)\right) \cdot p_i \cdot v_i \\ &\geq \left(1 - O\left(\sqrt{\frac{\log k}{k}}\right)\right) \cdot \mathbb{E}[\text{OPT}] \end{aligned}$$

# 複数選択预言者の不等式まとめ

- どんなアルゴリズムを用いても競合比は  $1 - \Omega\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)$
- スキップ確率をうまく設定することで競合比  $1 - O\left(\sqrt{\frac{\log k}{k}}\right)$  を達成
- 確率をうまく設定することで、競合比  $1 - \frac{1}{\sqrt{k+3}}$  を達成することも可能  
魔法使いの問題の解をスキップ確率として設定 [Alaei 2014]

- 1 預言者の不等式
- 2 順序選択預言者の不等式
- 3 複数選択預言者の不等式
- 4 演習とレポート

- リストアクセス問題に対し、「過去のアクセス数の大きい順に並べる」という FC アルゴリズムの競合比が  $\Theta(n)$  となることを示せ
- ページング問題に対し「ページフォルトが起きた時、将来の要求がもっとも遅いページを削除」が最適オフラインアルゴリズムとなるのはなぜか？
- ページング問題に対し FIFO の競合比が  $k$  となることを示せ.
- 最大化問題の競合比に対する Yao の不等式がどのようなものになるか考えよ.
- 預言者の不等式において  $\frac{1}{2}\mathbb{E}[\max_{i=1}^n X_i]$  を用いた閾値戦略が競合比  $1/2$  となることを示せ.

授業の最終回で解けた人は発表



## 課題

身の回りの問題をオンライン最適化としてモデル化して競合比解析をせよ．  
良い問題が思いつかない場合は，授業で扱わなかったオンライン最適化問題を調べ，モデルと競合比解析について取りまとめるというものでもよい  
(参考文献は明示せよ)．

- 締め切りは 7/20 の授業開始時（遅れた場合は採点されないかも）
- T2SCHOLA にて PDF 形式で提出