

数理・計算科学特論 C 第 6 回

河瀬 康志

2021 年 6 月 29 日

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人おり、 n は既知である
- 候補者と順番に面接をし、各面接の直後に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人おり、 n は既知である
- 候補者と順番に面接をし、各面接の直後に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

競合比解析

- 決定性アルゴリズムでは $n = 2$ でも競合比 0
 $v_1 = 1, v_2 = M (\gg 1)$ or $1/M (\ll 1)$
- 乱択アルゴリズム（オブリビアスアドバーサリ）でも確率 $1/n$ が最適
 - ▶ 一様ランダムに採用 $\rightarrow$ 競合比 $\frac{\sum_i v_i/n}{\max_i v_i} \geq 1/n$
 - ▶ 上界は $(M, M^2, \dots, M^i, 1, \dots, 1)$ という入力列を考えると示せる

$\rightarrow$ 乱択アルゴリズムを使っても、最悪の状況を考えるのは悲観的すぎる

確率的な入力モデルとしてランダム順序モデルを扱う

- 敵は n 個のリクエスト $r_1, \dots, r_n$ を選ぶ
- 入力列は $r_1, \dots, r_n$ が一様ランダムな順番
- 最適値は入力順に依らないような問題を扱う

最大化問題でのランダム順序モデルに対する評価指標

$$\text{競合比} = \inf_{r_1, \dots, r_n} \frac{\mathbb{E}_{\tau}[\text{ALG}(r_{\tau(1)}, \dots, r_{\tau(n)})]}{\text{OPT}(r_1, \dots, r_n)}$$

- 1 秘書問題
- 2 複数選択秘書問題
- 3 オンライン最大重みマッチング

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025

1

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521
1	2

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521	2704
1	2	3

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521	2704	19
1	2	3	4

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521	2704	19	4729
1	2	3	4	5

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521	2704	19	4729	8842
1	2	3	4	5	6

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521	2704	19	4729	8842	2219
1	2	3	4	5	6	7

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521	2704	19	4729	8842	2219	182
1	2	3	4	5	6	7	8

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521	2704	19	4729	8842	2219	182	3817
1	2	3	4	5	6	7	8	9

秘書問題

- 意思決定者は秘書を 1 人採用しようとしている
- 候補者は n 人いて、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値がなるべく大きくなるようにしたい

例 ($n = 10$)

2025	1521	2704	19	4729	8842	2219	182	3817	5781
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

「いつ探索をやめるか」という状況の抽象化であり多くの応用をもつ

- 結婚相手を何人目の交際相手で決めるか (結婚問題)
- オンラインで安い航空チケットを探している時、いつ購入するか
- よい駐車スペースを探しているときに、いつ駐車するか
- 家を売却するときに、いつオファーを受けるか
- 会社からの内定をいつ承諾するか
- グーグルという数当てゲームに対する戦略
- どのタイミングで株を売るか
- $\vdots$

ただしランダム順序が妥当かの検討が必要

アルゴリズム

アイデア

- 序盤で採用をすると、後から来る優秀な人を取り逃がしてしまいそう
- 人によって価値が大きく異なると、全体一位を取れないとダメ
- ある程度待ったのち、いい人がきたら採用するのが良さそう

閾値戦略

1. 最初の m 人は無条件でリジェクト
2. それ以降で「暫定一位」が現れたら採用

定理

$m = n/e$ での閾値戦略 (37%ルール) の競合比は $n \rightarrow \infty$ で $1/e$

どんなに人数が多くても、37% の期待値を保証できる

競合比の証明

定理

$m = n/e$ での閾値戦略の競合比は $n \rightarrow \infty$ で $1/e$

証明

- 全体一位を採用できる確率が $1/e$ 以上であることを示せば良い
- i ($\geq m+1$) 番目に全体一位が現れ、その人を採用する確率は

$$\Pr[v_i = \max_{t=1}^n v_t] \cdot \Pr[\max_{t=1}^m v_t = \max_{t=1}^{i-1} v_t] = \frac{1}{n} \cdot \frac{m}{i-1}$$

i が全体一位

$i-1$ までの暫定一位は m までに現れる

- 全体一位を採用できる確率は

$$\sum_{i=m+1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{m}{i-1} = \frac{m}{n} \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{i-1} \rightarrow \frac{1}{e} \int_{1/e}^1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{e}$$

定理

秘書問題の競合比は高々 $1/e + o(1)$

- 一般の場合の上界を示すのは難しいので、順序に基づくアルゴリズムについての上界のみ示す
- 実行可能なアルゴリズムを線形計画問題として表すことで、上界を導く

競合比の上界証明 (1/2)

主問題

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot p_i \\ \text{s.t.} & p_i \leq \frac{1}{i} \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j\right) \quad (\forall i) \\ & p_i \geq 0 \quad (\forall i)\end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{j=i+1}^n x_j + i \cdot x_i \geq \frac{i}{n} \quad (\forall i) \\ & x_i \geq 0 \quad (\forall i)\end{array}$$

- i 番目の候補者が暫定一位の時、確率 p_i で採用する乱択アルゴリズム

暫定一位の場合のみ、全体一位の可能性はある

- アルゴリズムが全体一位を取れる確率は $\sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot p_i$

i が暫定一位という条件のもとで全体一位

- p_i として取れるのは高々 $\frac{1}{i} \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)$

i が暫定一位

i までの誰も採用していない

競合比の上界証明 (2/2)

主問題

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot p_i \\ \text{s.t.} & p_i \leq \frac{1}{i} (1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j) \quad (\forall i) \\ & p_i \geq 0 \quad (\forall i)\end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{j=i+1}^n x_j + i \cdot x_i \geq \frac{i}{n} \quad (\forall i) \\ & x_i \geq 0 \quad (\forall i)\end{array}$$

- 主問題の最適値が競合比 オフライン最適値は 1 なので
- $x_i^* = \begin{cases} 0 & (i < n/e) \\ \frac{1}{n}(1 - \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{j}) & (i \geq n/e) \end{cases}$ は双対実行可能解 実是最適解
- $\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{i=n/e}^n \frac{1}{n}(1 - \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{j}) \rightarrow 1/e$ は最適値の上界 (弱双対性)

定理

秘書問題の競合比は高々 $1/e + o(1)$

アウトライン

- 1 秘書問題
- 2 複数選択秘書問題
- 3 オンライン最大重みマッチング

複数選択秘書問題

- 意思決定者は秘書を k 人採用しようとしている
- 候補者は n 人おり、 n は既知である
- 候補者はランダムな順番で面接を受ける ($n!$ 通りが等確率で起こる)
- 各面接の直後（次の面接を行う前）に採否を決める
- 面接を行うと、候補者の価値が分かる (同じ価値の候補者はいないと仮定)
- 採用した候補者の価値の和がなるべく大きくなるようにしたい

$n \rightarrow \infty$ において、最適なアルゴリズムの競合比はどうか？

1. 競合比 $\Theta(1/e^k)$
2. 競合比 $\Theta(1/k)$
3. k によらず競合比 $1/e$
4. $k \rightarrow \infty$ で競合比 1

アルゴリズム

アイデア

最初の δn 人程度をサンプルとして、全体 k 位の価値を推定する

閾値戦略（複）

試行回数 n , 成功確率 δ の二項分布

1. 最初の $\text{Binomial}(n, \delta)$ 人をリジェクトし、暫定 $(1 - \epsilon)\delta k$ 位の値を τ に
2. τ 以上の価値の人をグリーディーに k 人まで採用

単純に最初の δn 人をサンプルとすると、サンプルに入るかどうか人がについて独立にならないので解析が面倒

定理

$\epsilon = \delta = O(\log k / k^{1/3})$ の時、閾値戦略（複）の競合比は $1 - O(\delta)$

k が大きくなると競合比は 1 に漸近する！

$$\Pr[X < (1 - \epsilon)\mu] \leq \exp\left(-\frac{\mu \cdot \epsilon^2}{2}\right) \quad (0 \leq \epsilon)$$

$$\Pr[X > (1 + \epsilon)\mu] \leq \exp\left(-\frac{\mu \cdot \epsilon^2}{3}\right) \quad (0 \leq \epsilon \leq 1)$$

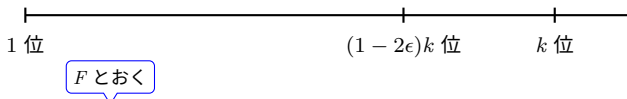
- $X_1, X_2, \dots, X_n$: 独立な $[0, 1]$ 上の確率変数
- $X = \sum_{i=1}^n X_i$
- $\mu = \mathbb{E}[X]$

期待値から離れた値が出る確率は指数的に小さい

競合比の証明

定理

$\epsilon = \delta = \log k / k^{1/3}$ の時, 閾値戦略 (複) の競合比は $1 - O(\delta)$



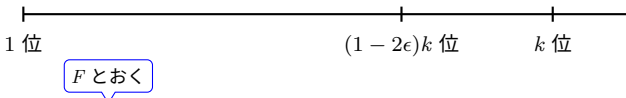
閾値 $\tau = [\text{最初の Binom}(n, \delta) \text{ 人のうち } (1 - \epsilon)\delta k \text{ 位の値}]$ で場合分け

τ は高確率で $(1 - 2\epsilon)k$ 位の値以下, k 位の値以上となることを利用する

競合比の証明

定理

$\epsilon = \delta = \log k / k^{1/3}$ の時、閾値戦略（複）の競合比は $1 - O(\delta)$



閾値 $\tau = [\text{最初の Binom}(n, \delta) \text{ 人のうち } (1 - \epsilon)\delta k \text{ 位の値}]$ で場合分け

τ は高確率で $(1 - 2\epsilon)k$ 位の値以下、 k 位の値以上となることを利用する

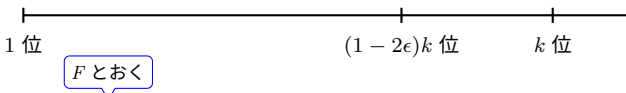
1. $\tau < \text{全体 } k \text{ 位の価値}$ となる確率は高々 $O(\delta)$

- ▶ 求める確率は $\Pr[|\text{全体上位 } k \text{ 人} \cap F| < (1 - \epsilon)\delta k]$ と同じ
- ▶ 各人が F に入る確率は δ なので、Chernoff の不等式が利用可能
- ▶ 求める確率は高々 $\exp(-\delta k \cdot \epsilon^2/2) = \exp(-\log^3 k) = O(\delta)$

競合比の証明

定理

$\epsilon = \delta = \log k / k^{1/3}$ の時, 閾値戦略 (複) の競合比は $1 - O(\delta)$



閾値 $\tau = [\text{最初の Binom}(n, \delta) \text{ 人のうち } (1 - \epsilon)\delta k \text{ 位の値}]$ で場合分け

τ は高確率で $(1 - 2\epsilon)k$ 位の値以下, k 位の値以上となることを利用する

2. $\tau > \text{全体 } (1 - 2\epsilon)k \text{ 位の価値}$ となる確率は高々 $O(\delta)$

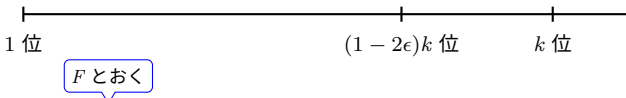
$$\left(1 + \frac{\epsilon}{1 - 2\epsilon}\right) \cdot (1 - 2\epsilon)\delta k$$

- ▶ 求める確率は $\Pr[|\text{全体上位 } (1 - 2\epsilon)k \text{ 人} \cap F| > (1 - \epsilon)\delta k]$ と同じ
- ▶ 各人が F に入る確率は δ なので, Chernoff の不等式が利用可能
- ▶ 求める確率は高々 $\exp\left(-\frac{\delta(1 - 2\epsilon)k}{3} \cdot \left(\frac{\epsilon}{1 - 2\epsilon}\right)^2\right) = \exp\left(-\frac{\delta k \epsilon^2}{3(1 - 2\epsilon)}\right) = O(\delta)$

競合比の証明

定理

$\epsilon = \delta = \log k / k^{1/3}$ の時、閾値戦略（複）の競合比は $1 - O(\delta)$



閾値 $\tau = [\text{最初の Binom}(n, \delta) \text{ 人のうち } (1 - \epsilon)\delta k \text{ 位の値}]$ で場合分け

τ は高確率で $(1 - 2\epsilon)k$ 位の値以下, k 位の値以上となることを利用する

3. 全体 k 位の価値 $\leq \tau \leq$ 全体 $(1 - 2\epsilon)k$ 位の価値 となる時

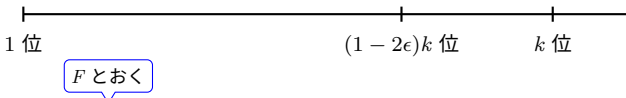
- ▶ 採用される人は全体 k 位以上だけ (τ 以上の価値がないと採用しないので)
- ▶ 全体 $(1 - 2\epsilon)k$ 位以上のうち F に入るのは $(1 - \epsilon)\delta k$ 人以下
($(1 - \epsilon)\delta k$ 人よりたくさん入るとすると, τ は全体 $(1 - 2\epsilon)k$ 位の価値より高くなる)

➡ 利得は $(1 - O(\delta)) \cdot \text{OPT}$

競合比の証明

定理

$\epsilon = \delta = \log k / k^{1/3}$ の時, 閾値戦略 (複) の競合比は $1 - O(\delta)$



閾値 $\tau = [\text{最初の Binom}(n, \delta) \text{ 人のうち } (1 - \epsilon)\delta k \text{ 位の値}]$ で場合分け

τ は高確率で $(1 - 2\epsilon)k$ 位の値以下, k 位の値以上となることを利用する

4. まとめると

- ▶ $\tau < \text{全体 } k \text{ 位の価値}$ となる確率は高々 $O(\delta)$
- ▶ $\tau > \text{全体 } (1 - 2\epsilon)k \text{ 位の価値}$ となる確率は高々 $O(\delta)$
- ▶ その他の場合の利得は $(1 - O(\delta)) \cdot \text{OPT}$

➡ 利得の期待値は $(1 - 2O(\delta))(1 - O(\delta))\text{OPT} = (1 - O(\delta))\text{OPT}$

- サンプル数を減らして閾値をうまく設定することで
競合比 $1 - O(\log k / k^{1/3})$ となるオンラインアルゴリズムを構成
- 動的に閾値を変えることで、競合比 $1 - O(1/\sqrt{k})$ にすることもできる
[Kleinberg 2005]
- 競合比 $1 - o(1/\sqrt{k})$ となるアルゴリズムは存在しない
各アイテムの価値を 0 (w.p. $1 - k/n$), 1 (w.p. $k/2n$), 2 (w.p. $k/2n$) と設定して Yao の原理

アウトライン

- 1 秘書問題
- 2 複数選択秘書問題
- 3 オンライン最大重みマッチング

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい

S

T

s_1

s_2

s_3

s_4

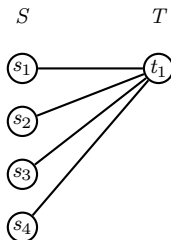
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



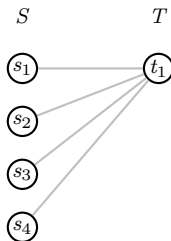
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



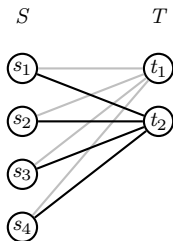
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



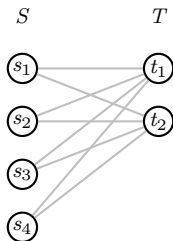
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



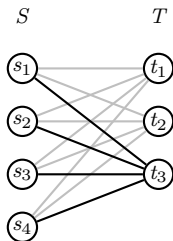
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



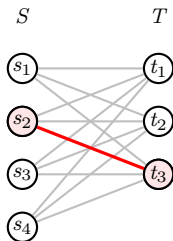
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力と考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



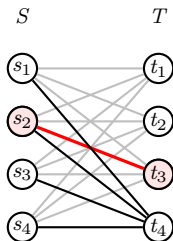
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力と考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



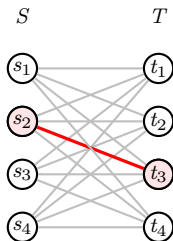
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力と考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



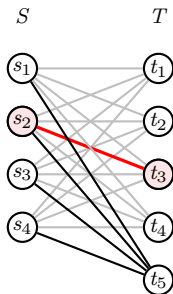
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力と考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



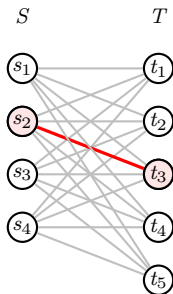
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



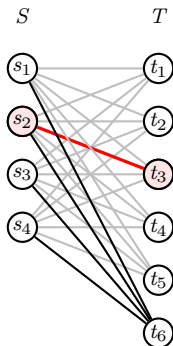
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



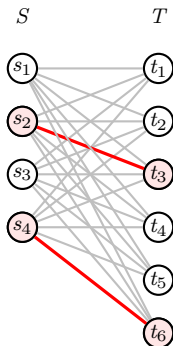
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



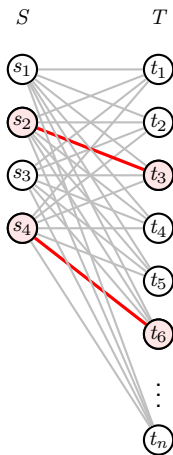
$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力を考えられるので同様)

オンライン最大重みマッチング

- 枝重み w をもつ二部グラフ $(S, T; E)$ について
 - ▶ 頂点集合 S と頂点数 $n = |T|$ が最初に与えられる
 - ▶ 各ステップ i では頂点 $t_i \in T$ とそれに接続する枝の重みが明らかになる
(ランダムな順番で与えられる)
- ステップ i では t_i に接続する枝を選択できる
ただしマッチング制約を満たす必要がある
- 最終的に選んだ価値の和を最大化したい



$|S| = 1$ の場合は通常秘書問題

→ 競合比は $1/e$ よりよくできない

($|S| > 1$ の場合も、独立な秘書問題 $|S|$ 個となるような入力と考えられるので同様)

アルゴリズム

マッチング版閾値戦略

```
while  $i$  番目の頂点  $t_i$  が来る do
  if  $i < n/e$  then continue;
   $S$  と  $T^{(i)} := \{t_1, \dots, t_i\}$  の間での最大重みマッチング  $M^{(i)}$  を求める;
  if  $e^{(i)} = (s, t_i) \in M^{(i)}$  かつ  $s$  がまだマッチしていない then
     $s$  と  $t_i$  をマッチさせる;
```

定理

マッチング版閾値戦略の競合比は $\frac{1}{e} - \frac{1}{n}$ 以上

補題

最大重みマッチングの重み

$$\mathbb{E}[\text{[} t_\ell \text{の貢献]}] \geq \frac{\lfloor n/e \rfloor}{\ell - 1} \cdot \frac{\text{OPT}}{n}$$

補題

$$\mathbb{E}[\text{t}_\ell \text{ の貢献}] \geq \frac{\lfloor n/e \rfloor}{\ell - 1} \cdot \frac{\text{OPT}}{n}$$

証明

- 集合 $T^{(\ell)}$ を固定した時, t_ℓ は $T^{(\ell)}$ から一様ランダムに選ばれる
 $\rightarrow \mathbb{E}[w(e^{(\ell)})] = \frac{1}{\ell} \cdot w(M^{(\ell)})$ (期待値は $T^{(\ell)}$ 内の要素の順番について)
 $e^{(\ell)}$ は $M^{(\ell)}$ の枝から一様ランダムに選ばれるから
- $T^{(\ell)}$ は $\binom{n}{\ell}$ 通りから一様ランダムに選ばれる
 $\rightarrow \mathbb{E}[w(M^{(\ell)})] \geq \frac{\ell}{n} \cdot \text{OPT}$ (期待値は T^ℓ の選び方について)
- 2 式より $\mathbb{E}[w(e^{(\ell)})] \geq \frac{1}{n} \cdot \text{OPT}$
- あとは $e^{(\ell)}$ がマッチできる確率が $\frac{\lfloor n/e \rfloor}{\ell - 1}$ 以上であることを示せば良い

補題

$$\mathbb{E}[\text{《}t_\ell \text{の貢献》}] \geq \frac{\lfloor n/e \rfloor}{\ell - 1} \cdot \frac{\text{OPT}}{n}$$

証明

- $T^{(\ell)}$ と t_ℓ を固定して, $T^{(\ell)} \setminus \{t_\ell\}$ の順序に関するランダム性を考察する
- $e^{(\ell)} = (s, t_\ell)$ として, $e^{(\ell)}$ がマッチできる確率を評価する
- 各 $k = \ell - 1, \ell - 2, \dots, \lceil n/e \rceil$ について,
 - ▶ ステップ k で s がマッチする確率は $1/k$ 以下 (順序の一樣ランダム性より)
 - ▶ 「 s がステップ k でマッチするか」と「 $T^{(k-1)}$ の頂点順序」は独立
- s がステップ ℓ 開始時にマッチしていない確率は

$$\prod_{k=\lceil n/e \rceil}^{\ell-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{\lceil n/e \rceil - 1}{\ell - 1} = \frac{\lfloor n/e \rfloor}{\ell - 1}$$

補題 $\Rightarrow$ 定理

補題

$$\mathbb{E}[\text{t}_\ell \text{ の貢献}] \geq \frac{\lfloor n/e \rfloor}{\ell - 1} \cdot \frac{\text{OPT}}{n}$$

定理

マッチング版閾値戦略の競合比は $\frac{1}{e} - \frac{1}{n}$ 以上

証明

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{アルゴリズムの利得}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{\ell=\lceil n/e \rceil}^n \text{t}_\ell \text{ の貢献}\right] \\ &\geq \sum_{\ell=\lceil n/e \rceil}^n \frac{\lfloor n/e \rfloor}{\ell - 1} \cdot \frac{\text{OPT}}{n} \\ &\geq \frac{\lfloor n/e \rfloor}{n} \int_{\lceil n/e \rceil}^n \frac{dx}{x} \cdot \text{OPT} \geq \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{n}\right) \cdot \text{OPT} \end{aligned}$$